

高等院校研究生用书
EXTBOOKS FOR
GRADUATES

结构方程模型

方法与应用

易丹辉 编著

中国人民大学出版社

现代统计分析方法与应用 (第二版)

何晓群

» 结构方程模型: 方法与应用

易丹辉

会计信息与证券投资实证研究: 重点文献导读

陆正飞 姜国华 张 然

财务会计与资本市场实证研究: 重点文献导读

陆正飞 姜国华 张 然

财务会计前沿专题

葛家澍 杜兴强

会计理论与方法研究 (第二版)

朱小平

财务管理理论与方法 (第二版)

王化成

管理研究方法: 原理与应用

刘 军

人大经管图书在线 <http://www.rdjg.com.cn>
了解图书出版信息 下载教学辅助资料

ISBN 978-7-300-09192-1/F · 3166

ISBN 978-7-300-09192-1



9 787300 091921 >

定价: 29.00元

下 高等院校研究
EXTBOOKS
GRADUATE

C32/4

2008

结构方程模型

方法与应用

易丹辉 编著

 中国人民大学出版社

资源分享网
PDG

图书在版编目 (CIP) 数据

结构方程模型：方法与应用/易丹辉编著.

北京：中国人民大学出版社，2008

高等院校研究生用书

ISBN 978-7-300-09192-1

I. 结…

II. 易…

III. 社会科学-统计模型：线性模型-研究生-教材

IV. C32

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 047202 号

高等院校研究生用书

结构方程模型：方法与应用

易丹辉 编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京雅艺彩印有限公司		
规 格	170 mm×228 mm 16 开本	版 次	2008 年 4 月第 1 版
印 张	13.5 插页 1	印 次	2008 年 4 月第 1 次印刷
字 数	245 000	定 价	29.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换



• 前 言 •

微观主体的行为和意愿是否可以计量，微观主体的行为与意愿对市场、市场主体各方面及宏观经济的影响，特别是对决策的影响以及它们之间的关系是否可以度量，随着社会的发展和科学技术的进步，人们越来越希望深入地认识这些问题。结构方程模型正是从微观个体出发探讨宏观规律的一种统计方法。其在教育、心理、医学、经济等领域有着广泛运用，公共管理、企业管理、市场营销等方面也都在运用。

结构方程模型将一些无法直接观测而又欲研究探讨的问题作为潜变量，通过一些可以直接观测的变量（指标）反映这些潜变量，从而建立起潜变量之间关系，也就是结构。结构方程模型主要是一种验证性的分析方法。它是从一种假设的理论架构出发，通过采集数据，验证这种理论假设是否成立的方法。要保证验证结论的可靠，构建具有良好信度和效度的测量指标至关重要。

笔者自 20 世纪 90 年代开始参与顾客满意度指数研究，一直在探讨结构方程模型及其应用的有关问题，指导本科生的论文和实习，承担北京市社科项目、教育部社科规划项目，研究生课程的讲授等，使得条理清楚了、内容丰富了，这才得以完成长达好几年的写作。感谢和我一起探讨的学生们：吴建民、庄菁、张首芳、许卫、周宏娟，等等，感谢他们对课程的认真和共同完成的作业，为本书提供了素材；感谢我的博士生贾知青、李扬，他们为本



书提供了第六章的初稿、第七章的案例。

感谢中国人民大学出版社的编辑为本书的出版所付出的劳动。由于时间和水平的限制，还有许多问题并没有完全清楚，需要进一步探讨和研究。目前这一方法又有了诸多的进展，愿意以此书为蓝本，与希望运用此方法的各位读者共同努力，探讨完善这一方法，更好地为我们从微观出发探索宏观规律服务。

易丹辉





• 目 录 •

第一章 概述	1
第一节 问题的提出	1
第二节 路径分析	4
第三节 模型的有关概念和记号	10
第二章 因果模型	21
第一节 因果模型的类型	21
第二节 因果模型的识别	27
第三节 因果模型的建立	35
第三章 结构方程模型设定	42
第一节 理论模型的设定	42
第二节 模型的基本假定	50
第三节 模型识别	56
第四章 模型参数估计	66
第一节 参数估计的基本思路	66
第二节 参数估计的常用方法	69
第三节 信度与效度	80



第四节 偏最小二乘法的应用	98
附录 测量误差的影响	105
第五章 模型评价	119
第一节 参数检验	119
第二节 模型整体评价	121
第三节 模型解释能力的评价	128
第六章 模型修正	130
第一节 模型修正的基本问题	130
第二节 模型修正的方法	134
第三节 模型修正时应注意的几个问题	147
附录 属性变量的处理	159
第七章 应用案例	165
第一节 模型设定	165
第二节 Amos 实现	170
第三节 模型拟合	180
第四节 模型修正	186
第五节 模型解释	194
附录一 Amos 简介	197
附录二 Amos 工具栏功能表	198
附录三 案例输出结果	200
附录四 拟合指数一览	206
参考文献	208



• 第一章 •

概 述

第一节 问题的提出

一、单变量线性回归分析回顾

1. 基本思路

单变量线性回归分析，即传统的回归分析，是用一个模型描述一个被解释变量（因变量）和一组解释变量（自变量）之间的线性关系。其被解释变量（因变量）只有一个，解释变量（自变量）可以是一个或多个。

2. 模型

(1) 模型形式。传统的回归分析中，模型如式 (1.1)。

$$Y = \gamma X + \zeta \quad (1.1)$$

式中， γ 是回归系数； ζ 是随机干扰项。

(2) 模型的基本假定。传统的回归分析中，对数据和模型有下面的假定条件： X 是非随机变量； Y 是随机变量； $E(\zeta) = 0$ ，且相互独立； ζ 与 X 无关。



3. 特点

(1) 由于使用一个线性模型度量多个指标变量之间直接的依存关系，变量之间的关系直观、简洁。

(2) 通常采用最小二乘法估计参数。参数估计时，采用最小二乘法，即

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \min$$

式中， Y 是观察值； \hat{Y} 是式 (1.1) Y 的估计值。

在许多方法中，如回归分析、联立方程组（经济计量模型）、因子分析、方差分析、协方差分析、Panel Data 分析等，基本思路都是研究 Y 与 \hat{Y} 的差值问题，使其最小化，即通过对残差进行分析得到待估计参数的值。

(3) 回归系数反映每一个自变量对因变量的影响程度，即能够反映变量间的结构关系。

二、因子分析回顾

1. 基本思路

多元统计分析中常用的因子分析，是寻找隐藏在可观测的指标变量中，无法直接观察到，却影响或支配指标变量的潜在因子（公共因子），所以也称作探索性因子分析。它是利用原始数据，提炼出一些公共因子（潜在因子），估计公共因子对指标的影响程度，以及公共因子之间关联性的方法。为了以后叙述的方便，公共因子均称为潜在因子。

2. 模型

(1) 模型形式。因子分析的数学模型如式 (1.2)。

$$x_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{iq}\xi_q + \delta_i, \quad i=1, 2, \cdots, k \quad (1.2)$$

式中， x_1, x_2, \cdots, x_k 是 k 个可观测的指标变量； $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q$ 是 q 个潜在因子， $q \leq k$ ； a_{ij} 是待估计的参数，称为因子载荷； δ_i 是误差，称为度量误差。式 (1.2) 中，因子载荷 a_{ij} 表示第 j 个潜在因子 ξ_j 对第 i 个可观测的指标变量 x_i 的影响程度； δ_i 表示 x_i 的随机测量误差或模型外的其他潜在因子对 x_i 的总影响，亦称为误差因子或特殊因子； ξ_j 是潜在因子，一般每个潜在因子至少对两个可观测的指标变量有影响，个别情况可能有一个，这时称为单指标因子。



(2) 模型的基本假定。因子分析要求数据和模型满足下面的假定条件： x_i 是随机变量； ξ_j 是方差为 1 的随机变量， ξ_j 之间相互独立； δ_i 是均值为 0，方差为常数的正态随机变量，且相互之间独立； δ_i 与所有的 ξ_j 相互独立。

3. 特点

(1) 探索多个指标变量中存在的理论变量即潜在因子。因子分析要求提取出的潜在因子相互之间是独立的，要尽可能多的概括原来指标变量的信息，并且要有实际意义，即每个因子都能有一个合理的命名。

(2) 将多指标变量之间的关联或依存关系，转化为少数几个因子之间的关系。因子分析使多个指标变量之间的关联或依存关系通过几个潜在因子变得更直观和容易解释。

三、实际应用中的问题

1. X 为随机变量

单变量回归分析中，假定 X 为非随机变量；若 X 为随机变量，有测量误差或 X 为潜在随机变量，不可以直接观测，模型将如何建立，参数如何估计，模型如何检验？

2. 多指标变量之间关系复杂

在许多实际问题中，多个指标变量之间的关系往往比较复杂，并不一定都是能够用一组自变量去解释一个因变量。例如，学历或受教育程度会影响其收入，而收入又会影响到消费支出的多少和消费结构，因此，学历或受教育程度就间接影响消费支出的多少和消费结构。多个变量之间不仅存在直接影响，还存在间接影响，如何建模？

3. 潜在因子之间不相互独立

因子分析中，要求潜在因子之间是相互独立的，而实际问题中，有些潜在因子之间存在一定的关联或依存关系，这种情况如何建模？

若有一些指标变量与某个潜在因子有关联，能否建立起指标与因子之间的关系？

$$\begin{aligned} \text{[例 1.1]} \quad x_1 &= \xi + \delta_1 \\ x_2 &= \xi + \delta_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

式中， x_1, x_2 为随机变量； ξ 为潜在随机变量； δ_1, δ_2 为随机干扰项。



$$E(\delta_1) = E(\delta_2) = 0$$

δ_1, δ_2 与 ξ 无关且彼此无关。

ξ 前面也可以有系数即因子载荷，反映观测变量与因子的关系。

将式 (1.1) 与式 (1.2) 结合，即将回归模型与因子分析结合，可以建立一个线性方程体系。

这个体系由两部分构成，回归部分类似于式 (1.1)，因子分析部分与式 (1.2) 和式 (1.3) 相同。

所谓线性是指所有变量，包括潜在变量 ξ 和可观测的变量 X 之间的关系，能够被表示在线性方程中，或者能够被转化为一种线性的形式。这个线性方程体系被称为结构方程模型 (structural equation model, SEM)。在后面的介绍中可以看到，结构方程模型主要是通过协方差矩阵完成模型建立的，而不是仅考虑 Y 与 \hat{Y} 的差值，因而模型也被称作协方差结构方程模型 (covariance structure model, CSM)。

第二节 路径分析

路径分析 (path analysis) 是由生物学家最先提出并发展的一种分析系统的因果关系的技术，主要用于分析多个指标变量之间的关系，特别是变量间存在间接影响关系的情况。

路径分析包括三个部分：路径图、依路径图写出协方差或相关系数与模型参数（如路径系数）的方程、效应分解。利用路径分析，可以分析自变量对因变量作用的方向、作用的大小以及解释的能力，亦可以用于预测。

一、路径图

路径图是路径分析最有用的一个工具。它是用图形形式表示变量之间的各种线性关系，包括直接的和间接的关系。图 1—1 是一个含有两个 X 变量和两个 Y 变量的路径图。

一般在路径图中，任意两个变量 A 和 B ，有四种可能的基本结构关系：

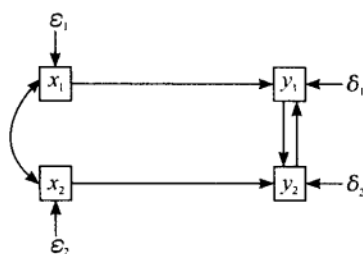


图 1—1 一个路径图示例

(1) A 可能影响 B ，但 B 不影响 A 。 A 和 B 之间的直线为单向箭头，由 A 指向 B 。

(2) B 可能影响 A ，但 A 不影响 B 。 A 和 B 之间的直线为单向箭头，由 B 指向 A 。

(3) A 可能影响 B ， B 也可能影响 A 。 A 和 B 之间的直线为双向箭头。

(4) A 和 B 之间没有假定的结构关系，但可能有相关关系。 A 和 B 之间有一带箭头的弧线相连。

路径图可以直观地展示可测变量与潜变量之间、各个潜变量之间以及可测变量之间的关系，给人一目了然的认识。在建立结构方程模型时，反映各个变量关系的理论模型通常用路径图表示。

1. 常用记号

在路径图中，矩形框表示可测变量或指标，如“住房面积”为 x_1 ，则可以表示为 $\boxed{x_1}$ ；圆的或椭圆的框表示潜变量，如“住房现状”为 η_1 ，则可以表示为 $\bigcirc(\eta_1)$ ；小的圆的或椭圆的框，或无任何框，标有 ϵ 或 δ 的变量，表示方程或测量的误差。单向箭头指向指标或可测变量，表示测量误差，如图 1—1 中的 ϵ ；单向箭头指向因子或潜变量，表示未能被内生潜变量解释的部分，是方程的误差，如图 1—2 中的 ζ 。单向直线箭头连结的两个变量表示假定有因果关系，箭头由原因变量指向结果变量，如图 1—1 中 x_1 与 y_1 ， x_1 为原因变量， y_1 为结果变量；如果两个变量之间连线的两端都有箭头，表示它们之间互为因果，如图 1—1 中 y_1 与 y_2 之间互为因果。弧形的双向箭头表示假定两个变量间无结构关系，但有相关关系，如图 1—1 中 x_1 与 x_2 之间的关系。变量之间没有任何连线，则表示假定它们之间没有直接联系，如图 1—1 中 x_1 与 y_2 之间的关系。



2. [例 1.2] 一个路径图的例子见图 1—2。

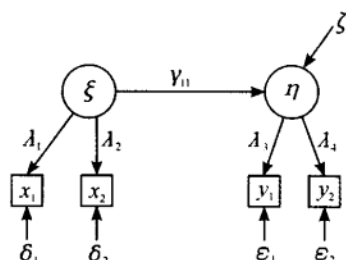


图 1—2 一个路径图

由图可以看出， ξ 与 η 之间是单向直线箭头，表示假定变量之间有因果关系，箭头由原因变量指向结果变量，即 ξ 影响 η 。根据图可以写出下面的结构方程模型：

$$\begin{aligned} \eta &= \gamma_{11} \xi + \zeta \\ x_1 &= \lambda_1 \xi + \delta_1 \\ x_2 &= \lambda_2 \xi + \delta_2 \\ y_1 &= \lambda_3 \eta + \varepsilon_1 \quad \text{Cov}(\varepsilon_1, \zeta) = 0 \\ y_2 &= \lambda_4 \eta + \varepsilon_2 \quad \text{Cov}(\varepsilon_2, \zeta) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

也可以得到如下的假定：

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\xi, \delta_1) &= 0 & \text{Cov}(\eta, \varepsilon_1) &= 0 & \text{Cov}(\delta_2, \varepsilon_1) &= 0 \\ \text{Cov}(\xi, \delta_2) &= 0 & \text{Cov}(\eta, \varepsilon_2) &= 0 & \text{Cov}(\delta_2, \varepsilon_2) &= 0 \\ \text{Cov}(\xi, \varepsilon_1) &= 0 & \text{Cov}(\delta_1, \delta_2) &= 0 & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= 0 \\ \text{Cov}(\xi, \varepsilon_2) &= 0 & \text{Cov}(\delta_1, \varepsilon_1) &= 0 & \text{Cov}(\delta_1, \zeta) &= 0 \\ \text{Cov}(\xi, \zeta) &= 0 & \text{Cov}(\delta_1, \varepsilon_2) &= 0 & \text{Cov}(\delta_2, \zeta) &= 0 \end{aligned}$$

路径图对把假设的理论模型写成公式形式是有用的工具。它指出了变量之间因果关系的方向和性质，可以很容易地识别模型的类型，也很容易由图写出模型的具体形式。

二、路径分析模型

(一) 模型形式

路径分析模型是反映多个变量之间关联或依存关系的模型。根据变量之

间关系的类型可以分为递归 (recursive) 和非递归 (non-recursive) 两类。递归模型中不含有相互影响的变量, 即路径图中没有双向箭头; 非递归模型则含有相互影响的变量, 路径图中允许存在双向箭头。路径分析模型的一般形式如式 (1.5)。

$$Y = \alpha + \beta Y + \gamma X + \varepsilon \quad (1.5)$$

式中, α , β , γ 是待估计的系数矩阵; ε 是残差项矩阵。

式 (1.5) 式写成矩阵为:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \cdots & \beta_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{p1} & \cdots & \beta_{pp} \end{bmatrix} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1q} \\ \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{q1} & \cdots & \gamma_{q1} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{bmatrix}$$

当对变量进行减均值的处理后, 变量间的线性关系不会发生改变, 但是常数项不在模型中。于是, 式 (1.5) 也可以写成式 (1.6)。

$$Y = \beta Y + \gamma X + \varepsilon \quad (1.6)$$

这是一个不含常数项的路径分析模型。

(二) 模型的基本假定

为了保证式 (1.5) 或式 (1.6) 得到的参数估计值无偏, 需要有以下假定条件:

(1) Y 为随机变量, 服从多元正态分布, 且每一个 Y 变量的残差项之间相互独立;

(2) X 为非随机变量, 无测量误差, 且相互独立;

(3) ε 为随机变量, 服从均值为 0, 方差为常数的多元正态分布, 且与 X 不相关。

为了保证参数的有效估计, 需要有一定的样本数目, Bentler (1993) 推荐的样本数据个数 n 至少要大于 $10k \sim 50k$, 其中, k 是模型中待估计的参数



可以看出，式 (1.5) 或式 (1.6) 仅对研究可观测变量之间关系适用。

(三) 路径系数

1. 含义

路径系数 (path coefficient) 是路径分析模型的回归系数，有标准化系数和非标准化系数之分。一般情况下，路径系数是指路径分析模型中标准化的系数，即将所有观测变量都标准化后的回归系数。

路径系数有两种，一种是反映外生变量影响内生变量的路径系数，通常用 γ 表示。如例 1.2 中的 γ_{11} ，表示由 ξ 到 η 的路径系数。路径系数的下标有两个，第一个表示所指向的结果变量，如指向 η_1 ，则路径系数的第一个下标为 1；第二个表示原因变量，如指向 η_1 的原因变量是 ξ_2 ，则第二个下标为 2，路径系数就为 γ_{12} 。另一种是反映内生变量影响内生变量的路径系数，通常用 β 表示，下标的规则与 γ 相同。如 η_1 为箭头指向的结果变量， η_2 为原因变量，则路径系数为 β_{12} 。

2. 作用

路径系数可以用来衡量变量之间的影响程度或变量的效应大小。

标准化系数是对数据进行标准化处理后得到的，因而没有测量单位，可以在同一模型中进行不同系数的比较。系数为正，表明自变量对因变量的影响是正向的；系数为负，表明其影响为负向的。一般来说，系数的绝对值越大，表明其影响作用越大。

三、效应分解

在路径分析中，具有因果关系的变量，在计算协方差时，通常将可测变量标准化。这样，得到的协方差就是相关系数。为了弄清变量之间如何作用，通常将相关系数进行分解，分成总效应、直接效应和间接效应。

1. 直接效应

直接效应 (direct effect) 反映原因变量 (外生或内生变量) 对结果变量 (内生变量) 的直接影响，其大小等于原因变量到结果变量的路径系数。

[例 1.3] 工业化与政治民主效应分析。^①

分析：图 1—3 是工业化与政治民主的路径图。其中， ξ_1 是工业化水平，

^① Kenneth A. Bollen, *Structural Equations with Latent Variables*, John Wiley & Sons, 1989, p. 17.



带有 3 个指标 $x_1 \sim x_3$; η_1 是 1960 年政治民主变量, 带有 4 个指标 $y_1 \sim y_4$; η_2 是 1965 年政治民主变量, 带有 4 个指标 $y_5 \sim y_8$ 。

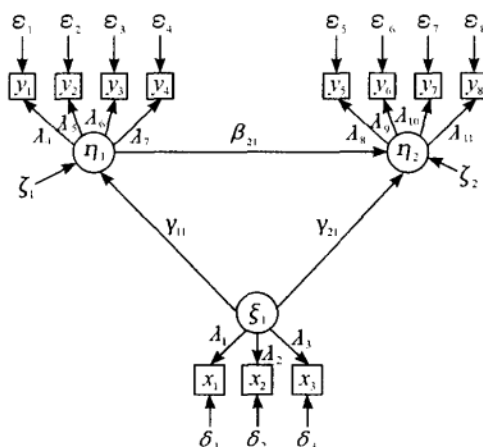


图 1—3 工业化与政治民主路径图

由图可知, η_1 到 η_2 直接效应为 β_{21} ; ξ_1 到 η_2 直接效应为 γ_{21} ; η_2 到 y_5 直接效应为 λ_5 。

2. 间接效应

间接效应 (indirect effect) 反映原因变量通过一个或多个中间变量对结果变量所产生的影响。

通过路径图, 观察箭头指向 (连接关系, 不是直接到达), 可以找到间接效应。如果只有一个中间变量, 间接效应是两个路径系数的乘积; 如果中间变量不止一个, 间接效应是所有从原因变量出发, 通过所有中间变量结束于结果变量的路径系数乘积。图 1—3 中, ξ_1 对 η_2 的间接效应, 通过 η_1 是 γ_{11} , 再通过 η_1 作用 η_2 即 β_{21} 。因此, ξ_1 对 η_2 的间接效应为 $\gamma_{11}\beta_{21}$ 。 η_1 对 y_7 的间接效应是 $\beta_{21}\lambda_{10}$ 。

3. 总效应

总效应是原因变量对结果变量的效应总和, 包括直接效应和间接效应。计算公式如式 (1.7)。

$$\text{总效应} = \text{直接效应} + \text{间接效应} \quad (1.7)$$

图 1—3 中, ξ_1 对 η_2 的总效应为: $\gamma_{21} + \gamma_{11}\beta_{21}$; ξ_1 对 y_8 的总效应为: $0 + \gamma_{21}\lambda_{11} + \gamma_{11}\beta_{21}\lambda_{11}$ 。



第三节 模型的有关概念和记号

一、模型记号

采用 Joreskog, Sorbom 的 LISREL (linear structural relationship) 软件的记号。结构方程模型包含两个部分, 结构模型和测量模型。

(一) 结构模型

结构模型 (structural model) 反映潜变量之间的因果关系, 亦称潜变量模型 (latent variable model) 或因果模型。其中的方程称为结构方程 (structural equation)。

1. 潜变量的含义

潜变量 (latent variable) 亦称隐变量, 是无法直接观测并测量的变量。如研究影响学生数学成绩的因素, 其中有逻辑思维能力, 是一个无法直接测量的变量; 又如研究居民购买住房行为的时候, “住房现状” 是一个重要的影响因素, 但无法直接测量, 是潜变量。潜变量需要通过设计若干指标间接加以测量。

2. 外生变量

外生变量 (exogenous observable) 是指那些在模型或系统中, 只起解释变量作用的变量。它们在模型或系统中, 只影响其他变量, 而不受其他变量的影响。在路径图中, 只有指向其他变量的箭头, 没有箭头指向它的变量均为外生变量。在结构方程模型中, 外生潜变量通常用 ξ 表示, 如图 1—3 中的 ξ_1 。

3. 内生变量

内生变量 (endogenous observable) 是指那些在模型或系统中, 受模型或系统中其他变量包括外生变量和内生变量影响的变量, 即在路径图中, 有箭头指向它的变量。它们也可以影响其他变量, 在结构方程模型中, 内生潜变量通常用 η 表示, 如图 1—3 中的 η_1, η_2 。内生潜变量的个数应与方程的个数相同, 即每一个内生潜变量都会对应一个方程。

4. 模型形式

结构模型用以描述潜变量之间的关系。其模型形式如式 (1.8)。



$$\underset{m \times 1}{\boldsymbol{\eta}} = \underset{(m \times m)(m \times 1)}{\mathbf{B}\boldsymbol{\eta}} + \underset{(n \times n)(n \times 1)(m \times 1)}{\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}} + \underset{(m \times 1)}{\boldsymbol{\zeta}} \quad (1.8)$$

式中, $\boldsymbol{\eta}$ 是内生潜变量; $\boldsymbol{\xi}$ 是外生潜变量; $\boldsymbol{\zeta}$ 是随机干扰项, 反映了式 (1.8) 中, $\boldsymbol{\eta}$ 未能被解释的部分; \mathbf{B} 是内生潜变量系数阵, 描述内生潜变量 $\boldsymbol{\eta}$ 之间的彼此影响; $\boldsymbol{\Gamma}$ 是外生潜变量系数阵, 描述外生潜变量 $\boldsymbol{\xi}$ 对内生潜变量 $\boldsymbol{\eta}$ 的影响; m 是内生潜变量数目; n 是外生潜变量数目。

潜变量 $\boldsymbol{\xi}$ 的协方差阵为:

$$\underset{n \times n}{E(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}') = \boldsymbol{\Phi}} \quad (1.9)$$

残差项 $\boldsymbol{\zeta}$ 的协方差阵为:

$$\underset{m \times n}{E(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}') = \boldsymbol{\Psi}} \quad (1.10)$$

条件为 $E(\boldsymbol{\eta})=0$, $E(\boldsymbol{\xi})=0$, $E(\boldsymbol{\zeta})=0$ 。

$\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\zeta}$ 不相关, $(\mathbf{I}-\mathbf{B})$ 非奇异, \mathbf{B} 的对角线上部分为 0, 为下三角阵。

[例 1.4] 图 1-3 的潜变量之间关系。

由图 1-3 可以写出三个潜变量之间的关系, 即得到结构模型, 如式 (1.11)。

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + \zeta_1 \\ \eta_2 &= \beta_{21}\eta_1 + \gamma_{21}\xi_1 + \zeta_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

写成矩阵

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \\ m &= 2 \\ n &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{其中, } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \end{bmatrix}$$



图 1—3 还表明, ζ_1 与 ζ_2 之间不存在相关, 即 Ψ 阵为对角阵。

(二) 测量模型

测量模型 (measurement model) 反映潜变量和可测变量之间的关系。若潜变量被视作因子, 则测量模型反映指标与因子之间的关系, 所以也被称为因子模型。由于通常用模型验证某种事先的假定, 因此亦被称为验证性因子模型, 其中的方程称为测量方程 (measurement equation)。

1. 可测变量含义

可测变量 (observed variable) 亦称显变量, 是可以直接观测并测量的变量, 也称为观测变量或指标。如住房面积的大小是一个可以直接观察和测量的变量, 是可测变量。如果“住房现状”是一个潜变量, 则“住房面积”可以作为测量它的一个指标。在结构方程模型中, 外生潜变量 ξ 的观测变量或指标, 通常用 X 表示; 内生潜变量 η 的观测变量或指标, 通常用 Y 表示。

2. 模型形式

测量模型用以描述潜变量和可测变量之间关系。其形式如式 (1.12) 和式 (1.13)。

$$X = \Lambda_x \xi + \delta \quad (1.12)$$

(q×1) (q×n)(n×1) (q×1)

$$Y = \Lambda_y \eta + \varepsilon \quad (1.13)$$

(p×1) (p×m)(m×1) (p×1)

式中, X 是 ξ 的观测指标; Y 是 η 的观测指标; δ 是 X 的测量误差; ε 是 Y 的测量误差; Λ_x 是 $q \times n$ 系数阵, 由 X 在 ξ 上的因子载荷构成; Λ_y 是 $p \times m$ 系数阵, 由 Y 在 η 上的因子载荷构成; p 是内生可测变量的数目; q 是外生可测变量的数目。

条件为: $E(\eta) = 0$, $E(\xi) = 0$, $E(\varepsilon) = 0$, $E(\delta) = 0$; ε 与 η , ξ 和 δ 无关; δ 与 ξ , η 和 ε 无关。

记

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \Theta_\varepsilon \quad (1.14)$$

(p×p)

$$E(\delta\delta') = \Theta_\delta \quad (1.15)$$

(q×q)

则 Θ_ε 是 ε 的协方差阵; Θ_δ 是 δ 的协方差阵。



3. 示例

[例 1.5] 研究工业化进程与政治民主的测量模型。

分析：

如图 1—3 所示，工业化、政治民主是潜变量，分别以 ξ 和 η 表示。

工业化程度可以用三个测量指标反映，分别为： x_1 代表 GNP（按人口计算）； x_2 代表没有生命的能源消耗（按人口计算）； x_3 代表工业劳动力的比例。

用 ξ 表示工业化程度，则有

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_1 \xi_1 + \delta \\x_2 &= \lambda_2 \xi_1 + \delta_2 \\x_3 &= \lambda_3 \xi_1 + \delta_3\end{aligned}\quad (1.16)$$

政治民主的测量指标为：

y_1, y_5 是 1960 年和 1965 年新闻专家的自由评级；

y_2, y_6 是 1960 年和 1965 年政治反对的自由程度；

y_3, y_7 是 1960 年和 1965 年选举的公正性；

y_4, y_8 是 1960 年和 1965 年被选举的立法机关的有效性。

η_1, η_2 分别表示 1960 年和 1965 年的政治民主程度，则有

$$\begin{aligned}y_1 &= \lambda_4 \eta_1 + \epsilon_1 & y_5 &= \lambda_8 \eta_2 + \epsilon_5 \\y_2 &= \lambda_5 \eta_1 + \epsilon_2 & y_6 &= \lambda_9 \eta_2 + \epsilon_6 \\y_3 &= \lambda_6 \eta_1 + \epsilon_3 & y_7 &= \lambda_{10} \eta_2 + \epsilon_7 \\y_4 &= \lambda_7 \eta_1 + \epsilon_4 & y_8 &= \lambda_{11} \eta_2 + \epsilon_8\end{aligned}\quad (1.17)$$

写成矩阵形式为：

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{A}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{A}_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon}\end{aligned}\quad (1.18)$$

$$\text{其中, } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\xi} = [\xi_1] \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$



$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix} \quad \Lambda_y = \begin{bmatrix} \lambda_4 & 0 \\ \lambda_5 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \\ \lambda_7 & 0 \\ 0 & \lambda_8 \\ 0 & \lambda_9 \\ 0 & \lambda_{10} \\ 0 & \lambda_{11} \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \end{bmatrix}$$

Λ_y 和 Λ_x 中的 λ_i 是连接潜变量和可测变量的系数； λ_{ij} 中 i 与 $x_i(y_i)$ 有关， j 涉及 $\xi_j(\eta_j)$ ，影响 $x_i(y_i)$ 。

各个潜变量是用几个可观察的变量量度的，式 (1.16) 和式 (1.17) 为测量模型，反映了各个潜变量与可测变量之间的关系。

二、协方差

(一) 协方差运算

1. 含义

若 x_1, x_2 为可观测的变量，则 x_1 与 x_2 之间的关系可以用协方差表示，其计算公式如式 (1.19)。

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_1, x_2) &= E[(x_1 - E(x_1))(x_2 - E(x_2))] \\ &= E(x_1, x_2) - E(x_1)E(x_2) \end{aligned} \quad (1.19)$$

若考虑 x_1 与 x_1 的关系，其协方差就是 x_1 的方差，即有

$$\text{Var}(x_1) = \text{Cov}(x_1, x_1) = E[(x_1 - E(x_1))^2] \quad (1.20)$$

由式 (1.19) 可以看出，协方差是利用两个变量间观测值与其均值离差的期望测度两个变量间的关系强弱。一般来说，协方差越大，表明两个变量之间相关程度越高。

2. 运算规则

若 c 是常数， x_1, x_2, x_3 是变量，则有

- (1) $\text{Cov}(c, x_1) = 0$
- (2) $\text{Cov}(cx_1, x_2) = c\text{Cov}(x_1, x_2)$
- (3) $\text{Cov}(x_1 + x_2, x_3) = \text{Cov}(x_1, x_3) + \text{Cov}(x_2, x_3)$

这些运算规则也适用于潜变量。如潜变量 ξ_1 带有观测变量 x_1 , 若 x_1 换作 $x_1 + c$, 有

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\xi_1, x_1 + c) &= \text{Cov}(\xi_1, x_1) + \text{Cov}(\xi_1, c) \\ &= \text{Cov}(\xi_1, x_1)\end{aligned}$$

若 x_1 换作 cx_1 , 则有

$$\text{Cov}(\xi_1, cx_1) = c\text{Cov}(\xi_1, x_1)$$

若有

$$x_1 = \lambda_1 \xi_1 + \delta_1$$

$$x_2 = \lambda_2 \xi_1 + \delta_2$$

且

$$\text{Cov}(\xi_1, \delta_1) = \text{Cov}(\xi_1, \delta_2) = 0; \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

则

$$\begin{aligned}\text{Cov}(x_1, x_2) &= \text{Cov}(\lambda_1 \xi_1 + \delta_1, \lambda_2 \xi_1 + \delta_2) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \phi_{11}\end{aligned}$$

其中, ϕ_{11} 是潜变量 ξ_1 的方差, $\phi_{11} \neq 0$ 。在上式中, 由于 λ_1 及 λ_2 大于 0, ϕ_{11} 是 ξ_1 的方差, 大于 0, 所以 $\text{Cov}(x_1, x_2) > 0$, 即 x_1 和 x_2 必须有一个正的协方差。

(二) 样本协方差

1. 总体方差—协方差矩阵

定义: Σ 为总体协方差, 有时也用 Σ_{XY} 表示 X, Y 的协方差矩阵。根据式 (1.19), 变量 X, Y 的协方差为:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})] = \Sigma \quad (1.21)$$

2. 样本方差—协方差矩阵

利用 X, Y 的样本数据得到的关于 X, Y 的方差—协方差矩阵定义为 S , 计算如式 (1.22)。

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]$$



$$\text{由于 } \text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N-1} \quad (1.22)$$

可以证明：

$$S = \left(\frac{1}{N-1} \right) Z Z'$$

其中， Z 是总体协方差矩阵； S 是样本协方差矩阵。

若数据是向量 $[Y', X']'$ ，则总体方差—协方差矩阵为：

$$\text{Cov} \begin{bmatrix} Y \\ \vdots \\ X \end{bmatrix} = \underset{(p+q) \times (p+q)}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underset{p \times p}{\Sigma_{11}} & \underset{p \times q}{\Sigma_{12}} \\ \underset{q \times p}{\Sigma_{21}} & \underset{q \times q}{\Sigma_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cov}(Y) & \text{Cov}(Y, X) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Cov}(X) \end{bmatrix}$$

若已知 n 个观测值 $[y'_j, x'_j]'$ ($j=1, \dots, n$)，则样本方差—协方差矩阵 S 可以按与 Σ 一致的方式分块，如式 (1.23)。这样，可以利用 S 中的信息估计 Σ 。

$$\underset{(p+q) \times (p+q)}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underset{p \times p}{S_{11}} & \underset{p \times q}{S_{12}} \\ \underset{q \times p}{S_{21}} & \underset{q \times q}{S_{22}} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

3. 协方差分析

【例 1.6】 一个潜变量对应 4 个观测变量示例。

分析：图 1—4 是一个潜变量对应四个观测变量的路径图。

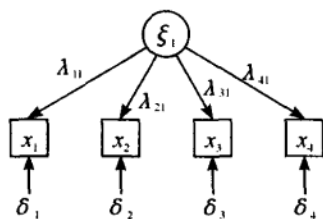


图 1—4 一个潜变量对应 4 个观测变量

由图可以写出模型形式，如式 (1.24)。



$$\begin{aligned}
 x_1 &= \lambda_{11}\xi_1 + \delta_1 \\
 x_2 &= \lambda_{21}\xi_1 + \delta_2 \\
 x_3 &= \lambda_{31}\xi_1 + \delta_3 \\
 x_4 &= \lambda_{41}\xi_1 + \delta_4
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

对 ξ_1 来说, 对所有的 i , 有 $\text{Cov}(\xi_1, \delta_i) = 0$, $E(\delta_i) = 0$; δ_i 之间彼此无关。根据协方差的线性性质 $\text{Cov}(\Sigma ax, y) = \Sigma a \text{Cov}(x, y)$ 和图 1—4 或式 (1.24) 有

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(x_1, x_4) &= \text{Cov}(\lambda_{11}\xi_1 + \delta_1, \lambda_{41}\xi_1 + \delta_4) \\
 &= \lambda_{11}\lambda_{41}\phi_{11}
 \end{aligned}$$

式中, ϕ_{11} 是 ξ_1 的方差。因为 ξ_1 与 δ_1 无关, ξ_1 与 δ_2 无关, 所以 x_1, x_4 的协方差通过 λ_{11} 和 λ_{41} 仅与 ξ_1 有关。

[例 1.7] 对式 (1.24): $X = \Lambda_x \xi + \delta$ 求解 X 的方差—协方差矩阵 Σ 。

分析:

$$\begin{aligned}
 \text{由于 } XX' &= (\Lambda_x \xi + \delta)(\Lambda_x \xi + \delta)' \\
 &= (\Lambda_x \xi + \delta)(\xi' \Lambda_x' + \delta') \\
 &= \Lambda_x \xi \xi' \Lambda_x' + \Lambda_x \xi \delta' + \delta \xi' \Lambda_x' + \delta \delta'
 \end{aligned}$$

X 的方差—协方差阵:

$$E(XX') = \Lambda_x E(\xi \xi') \Lambda_x' + \Lambda_x E(\xi \delta') + E(\delta \xi') \Lambda_x' + E(\delta \delta')$$

因为 ξ 与 δ 无关, 所以, $E(\xi \delta') = 0$, 记 $E(\xi \xi') = \Phi$, $E(\delta \delta') = \Theta_\delta$ 。

则 $\Sigma = \Lambda_x \Phi \Lambda_x' + \Theta_\delta$ 。

X 的协方差矩阵 Σ 含有 Λ_x, Φ 和 Θ_δ 。

三、结构方程模型的基本思想

1. 结构方程模型的基本形式

结构方程模型是反映潜变量之间关系的因果模型与反映指标与潜变量之间关系的因子模型的结合。模型的基本形式如式 (1.25)。

$$\begin{aligned}
 \eta &= B\eta + \Gamma\xi + \zeta \\
 X &= \Lambda_x \xi + \delta \\
 Y &= \Lambda_y \eta + \varepsilon
 \end{aligned} \tag{1.25}$$



式中各个符号的含义同前面的结构模型和测量模型。根据结构模型和测量模型的假设，结构方程模型的假设为：

- (1) 测量模型误差项 ε , δ 的均值为零；
- (2) 结构模型的残差项 ζ 的均值为零；
- (3) 误差项 ε , δ 与因子 η , ξ 之间不相关，误差项 ε 与 δ 不相关；
- (4) 残差项 ζ 与 ξ , ε , δ 之间不相关。

通常为便于系数大小的解释，即利用系数值比较说明不同因素的作用，还假设指标都是标准化的，但这个条件并不是必须的。

一个完整的结构方程模型包含 8 个参数矩阵： Λ_x , Λ_y , B , Γ , Φ , Ψ , Θ_ε , Θ_δ 。

2. 结构方程模型求解的思路

在大多数应用统计方法中，求解模型都是从每一个样本观测值的情况出发。如在回归分析中，回归系数估计，从每一个样本观测值与实际值的残差出发进行分析。

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

e 是观察值与估计值之间的差异，求解模型就是使其最小。

结构方程模型求解的出发点是，被观察变量的协方差矩阵是一组待估计参数的函数。如果模型是正确的（且知道这些参数），那么总体的协方差矩阵就能够被准确地重复出来，即有

$$\Sigma = \Sigma(\theta) \quad (1.26)$$

其中： Σ 是被观察的总体的协方差矩阵，用样本协方差阵替代，可以用可测变量的值计算； θ 是个矢量，含有模型的待估计参数； $\Sigma(\theta)$ 是作为一个 θ 的函数写出的方差—协方差矩阵。根据式 (1.26)，两个矩阵相等，则其相应位置元素相等，可以求解出待估计的参数 θ 。

[例 1.8] 式 (1.27) 回归模型参数求解。

$$y = \gamma x + \zeta \quad (1.27)$$

式中， γ 是回归系数； ζ 是随机干扰项，与 x 无关，且

$$E(\zeta) = 0$$

分析：按式 (1.26)，有



$$\begin{bmatrix} \text{Var}(y) \\ \text{Cov}(x, y) & \text{Var}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2 \text{Var}(x) + \text{Var}(\zeta) & \\ \gamma \text{Var}(x) & \text{Var}(x) \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

式 (1.28) 表明, 等号左边是总体的方差—协方差矩阵 Σ , 可以用样本观测值计算得到; 等号右边是含有 θ 的方差—协方差矩阵 $\Sigma(\theta)$, θ 含有 γ , $\text{Var}(x)$ 和 $\text{Var}(\zeta)$, 由于 $\text{Var}(x)$ 已知, θ 中有两个待估计参数 γ , $\text{Var}(\zeta)$ 。

根据矩阵相等的运算, 左右相应元素应相等, 即

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) &= \gamma \text{Var}(x) \\ \text{Var}(y) &= \gamma^2 \text{Var}(x) + \text{Var}(\zeta) \end{aligned}$$

两个方程, 两个待估计参数, 可以求解。

[例 1.9] 式 (1.29) 的模型参数求解。

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + \delta_1 \\ x_2 &= \xi + \delta_2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

式中, ξ 是潜在因子; x_1, x_2 是可测随机变量; δ_1, δ_2 是随机干扰项, 与 ξ 无关, 有

$$E(\delta_1) = E(\delta_2) = 0$$

分析: 按式 (1.26), 有:

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(x_1) \\ \text{Cov}(x_1, x_2) & \text{Var}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi + \text{Var}(\delta_1) & \\ \Phi & \Phi + \text{Var}(\delta_2) \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

式中, Φ 是潜在因子 ξ 的方差; θ 由三个要素组成: $\Phi, \text{Var}(\delta_1), \text{Var}(\delta_2)$ 。被观测到的变量的协方差矩阵 $\Sigma(\theta)$ 是这三个参数的函数。三个方程, 三个参数, 可以求解。

将式 (1.27) 的回归模型与式 (1.29) 的因子分析模型结合, 得到

$$\begin{aligned} y &= \gamma \xi + \zeta \\ x_1 &= \xi + \delta_1 \\ x_2 &= \xi + \delta_2 \end{aligned} \quad (1.31)$$

假定 $\zeta, \delta_1, \delta_2$ 与 ξ 不相关, 且彼此无关, 期望为零。

按式 (1.26), 有



$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \text{Var}(y) \\ \text{Cov}(x_1, y) & \text{Var}(x_1) \\ \text{Cov}(x_2, y) & \text{Cov}(x_1, x_2) & \text{Var}(x_2) \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \gamma^2 \Phi + \text{Var}(\xi) & & \\ \gamma \Phi & \Phi + \text{Var}(\delta_1) & \\ \gamma \Phi & \Phi & \Phi + \text{Var}(\delta_2) \end{bmatrix} \quad (1.32)
 \end{aligned}$$

虽然式 (1.31) 的模型中, 观测变量、潜变量以及扰动变量构成三个线性方程, 但协方差结构方程未必是线性的, 如式 (1.32) 中 $\text{Cov}(x_1, y)$ 是 γ 和 Φ 的一个非线性函数。“结构的”(structural) 代表了一种假定。它试图揭示变量间的一种因果关系, 而这种关系假定能够在观测到的样本中得到印证。可以看出, 结构方程模型, 最小化的差值是样本协方差与被模型预测的协方差之间的差值。结构方程模型的求解, 运用的是变量间的协方差, 即变量间的关系, 变量观测值标准化后, 其协方差阵就是变量间的相关系数阵, 因此, 模型亦被称为协方差结构模型 (covariance structure model, CSM)。本书主要讨论的是线性结构方程模型。目前, 关于结构方程模型的研究有了更多的进展, 有兴趣的读者可以参看相关文献。





• 第二章 •

因果模型

因果模型是用路径分析技术，验证变量之间是否存在假设的因果关系的一类模型。回归分析探讨一个因变量与一个或多个自变量之间的结构关系，因果模型则用于分析多个因变量与多个自变量的结构关系。

因果模型仅探讨可测变量之间的结构关系，结构方程模型则扩展到潜变量之间的结构关系，这也是结构方程被称为因果模型的原因。但要注意，因果模型不是用于探索变量间的因果结构关系，而是需要事先假设变量间的结构关系，利用数据验证说明这种假设。

第一节 因果模型的类型

一、因果模型的基本类型

因果模型有两种基本类型：递归（recursive）模型和非递归（non-recursive）模型。

（一）递归模型定义

递归模型是指因果模型中变量之间只有单向的因果关系，没有直接或间接的反馈，并且所有误差彼此都不相关，即各内生变量与其原因变量的误差



之间或两个内生变量误差项相互独立，也就是相关系数为零的模型。

利用路径图很容易判定因果模型的类型。在路径图中，只有单向直线箭头，并且误差之间没有弧线箭头的模型，就是递归模型。

图 2—1 和图 2—2 的路径图表示的是递归模型。

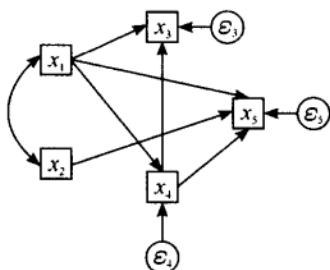


图 2—1 一个递归模型路径图

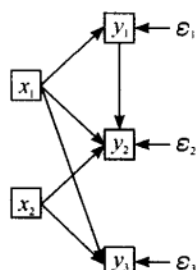


图 2—2 一个递归模型路径图

(二) 非递归模型定义

符合以下情况之一的是非递归模型。

1. 模型中任何两个变量间存在双向因果关系，即有直接反馈作用

在路径图中，只要有变量间存在双向直线箭头，表明两个变量为双向因果关系，则为非递归模型。图 2—3 是这种情况的示意图。

2. 变量间虽然没有直接反馈作用，但存在间接反馈作用

在路径图中，有间接的循环箭头，则为非递归模型。图 2—4 是这种情况的示意图。图中，变量 x_1 与 x_3 之间，存在间接反馈作用。

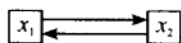


图 2—3 直接反馈路径图

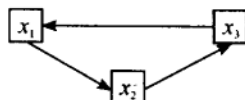


图 2—4 间接反馈路径图

3. 某个变量存在自身反馈作用，即变量存在自相关

在路径图中，弧形箭头指向变量自身，表明变量存在自相关，为非递归模型。图 2—5 是这种情况的示意图。



图 2—5 自相关路径图

4. 每一个内生变量的误差项是否与其他有关项相关

表现为：



- (1) 一个结果变量的误差项与其原因变量相关；
- (2) 不同变量的误差项之间存在相关。

利用路径图很容易判定非递归模型。在路径图中有直接或间接的循环直线箭头，或误差之间存在弧线箭头，都说明模型为非递归模型。

图 2—6 的路径图表示的是非递归模型。图中， y_1 和 y_2 之间有双向箭头，表明存在双向因果关系，即有直接反馈作用。根据这一条件可以判定其为非递归模型。非递归模型在某些假定下，也可以转换为递归模型。如图 2—6 的模型，如果假定 y_1 对 y_2 有影响，而 y_2 对 y_1 的影响为零，则为递归模型。

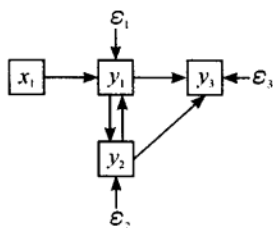


图 2—6 非递归模型路径图

二、递归模型的基本性质

(一) 递归模型的假设条件

1. 各变量间的关系为线性、可加的因果关系。

变量间呈线性关系意味着原因变量的每一单位变化引起结果变量的变化量不变。

变量间的线性关系使得多个原因变量作用于一个结果变量时，各原因变量的作用可以迭加。

2. 每一内生变量的误差项与外生变量不相关，与其他内生变量的误差也不得相关。

3. 模型中因果关系必须为单向，不能包含各种形式的反馈作用。

4. 模型中各变量至少为间距测度等级，即定距尺度测量。

5. 各变量自身的测量不存在误差。

(二) 性质

根据递归模型的假设条件，可得知模型具有以下性质。

第一，所有的递归模型都是可识别的。只有可识别的模型才可能通过建立结构方程组确定路径系数的解。

第二，允许采用最小二乘法得到联立方程组中各个系数的无偏估计。对方程组中的每个方程进行回归，所得到的（偏）回归系数是相应的路径系数，路径系数既可以采用未标准化回归系数，也可采用标准化的回归系数。



三、因果模型的基本形式

因果模型的一般形式如式 (2.1)，与结构方程模型中的结构模型形式一样，只不过这里不含有潜变量。

$$Y = BY + \Gamma X + \zeta \quad (2.1)$$

式中， Y 是 p 个内生观测变量矩阵； X 是 q 个外生观测变量矩阵； B 是内生路径系数阵； Γ 是外生路径系数阵； ζ 是内生观测变量的误差阵。

[例 2.1] 研究个人收入和职业声望与个人对自己总体社会地位认知之间的关系。^①

分析：设 x_1 为实际个人收入； x_2 为实际职业声望； y_1 为对个人总体社会地位的评价； y_2 为对职业声望的主观认知； y_3 为对个人总体社会地位的评价。考虑 y_1 ， y_2 ， y_3 存在测量误差，误差之间相关， y_1 ， y_2 相互影响，同时影响个体对自己总体社会地位的认知 y_3 。

根据上面的探讨，可以将变量间关系表示为图 2—7。这就是因果模型的理论模型，即假设模型。由理论模型，可以写出模型的具体形式，如式 (2.2)。

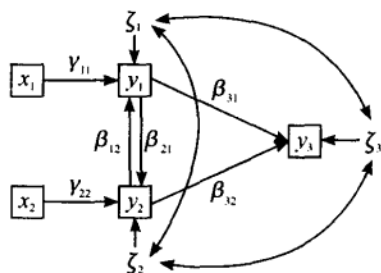


图 2—7 初始模型

$$Y = BY + \Gamma X + \zeta \quad (2.2)$$

$$\text{式中, } B = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即

^① Kenneth A. Bollen: *Structural Equations with Latent Variables*, John Wiley & Sons, 1989, p. 84.



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}$$

误差的协方差阵 Ψ 为:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & & \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{bmatrix}$$

很显然, y_1 与 y_2 存在反馈关系, 式 (2.2) 为非递归模型。

若事先假定只存在 y_1 对 y_2 的影响, 没有 y_2 对 y_1 的影响, 即只有 y_1 对 y_2 的单向箭头, 则 $\beta_{12}=0$, 有

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

这时, B 是一个下三角阵。

假定内生变量各误差项之间相互独立, 则有

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & & \\ & \psi_{22} & \\ & & \psi_{33} \end{bmatrix}$$

这时, Ψ 是一个对角阵。

这种情况下, 模型 $Y=BY+GX+\zeta$ 是递归模型。

由例 2.1 可知, 若内生变量系数阵 B 为下三角阵, 误差项协方差阵 Ψ 为对角阵, 则模型为递归模型, 否则是非递归模型。

四、因果关系的含义

所谓的因果关系一般理解为: x_1 变动引起 y_1 变动, 则 x_1 是 y_1 的原因; y_1 变动引起 x_1 变动, 则 y_1 是 x_1 的原因。但是, x_1 不可能完全解释 y_1 ; y_1 也不可能完全解释 x_1 。因而, 因果模型建立时, 必然会有随机干扰项。若因果模型成立, 随机干扰项与原因变量之间是无关的。



【例 2.2】有模型 $y_1 = \zeta_1$ ^①，其中， y_1 是美国各州在给定年份机动车死亡人数； ζ_1 是包含说明 y_1 的决定性因素。 (2.3)

分析：假如： ζ_1 有一个变量 x_1 ，且有

$$\zeta_1 = f(x_1)$$

则 $y_1 = f(x_1)$ ，若 $f(x_1) = \gamma_{11} x_1$ ，那么， $f(x_1)$ 就是一个简单的线性函数，则

$$y_1 = \gamma_{11} x_1 + \zeta_1 \quad (2.4)$$

式 (2.4) 中 ζ_1 与式 (2.3) 中 ζ_1 不同，是除 x_1 以外的其他影响，即随机干扰项。

假定 $E(\zeta) = 0$ ， ζ 与 x_1 不相关。

对于 y_1 来说，如果除 x_1 外，还有更多的影响因素，可以有

$$y_1 = \gamma_{11} x_1 + \gamma_{12} x_2 + \cdots + \gamma_{1q} x_q + \zeta_1 \quad (2.5)$$

若 Γ_1 是 $1 \times q$ 向量，即 $\Gamma_1 = [\gamma_{11}, \cdots, \gamma_{1q}]$ ，则

$$y_1 = \Gamma_1 \mathbf{X} + \zeta_1$$

其中， $E(\zeta_1) = 0$ ， $\text{Cov}(\mathbf{X}, \zeta_1) = 0$ ， γ_{1j} ($j = 1, \cdots, q$) 是 x_j 变动 1 个单位引起的 y_1 的平均变动。 ζ_1 是扰动变量，与 $x_1 \sim x_q$ 无关。

ζ_1 对于 y_1 来说是未知的，这些忽略的变量，可以看作随机干扰项，则

$$\zeta_1 = f(x_{q+1}, \cdots, x_w) \quad (2.6)$$

这里， $f(x_{q+1}, \cdots, x_w)$ 是 $x_{q+1} \sim x_w$ 的函数。如果函数形式能够得到，式 (2.6) 与式 (2.5) 可以合并，得到 x_j ($j = 1, \cdots, w$) 对于 y_1 的说明，即可以用 w 个变量解释说明 y_1 ，或说 w 个变量是 y_1 变动的原因。

若不能有函数 $f(x_{q+1}, \cdots, x_w)$ ，只能归入 ζ_1 。

如果

$$\text{Cov}(\mathbf{X}, \zeta_1) = \text{Cov}[\mathbf{X}, f(x_{q+1}, \cdots, x_w)] \neq 0 \quad (2.7)$$

① Kenneth A. Bollen: *Structural Equation with Latent Variables*, John Wiley & Song, 1989, p. 41.



其中, $\mathbf{X}=[x_1, \dots, x_q]$, 则上式违背 $\text{Cov}(\mathbf{X}, \zeta_1)=0$ 的假定。因此当只有 q 个原因变量时, 这 q 个变量与随机干扰项之间必须是无关系的, 即满足 $\text{Cov}(\mathbf{X}, \zeta_1)=0$ 。

第二节 因果模型的识别

模型的识别, 就是对于给定的模型判定参数是否可以估计。若参数可以估计, 模型可识别; 参数无法得到有效的估计值, 则模型不可识别。

一、模型的协方差阵

因果模型如式 (2.1)。

$$\mathbf{Y}=\mathbf{B}\mathbf{Y}+\mathbf{\Gamma}\mathbf{X}+\boldsymbol{\zeta}$$

其中,

$$\mathbf{E}(\mathbf{X})=0, \mathbf{E}(\boldsymbol{\zeta})=0, \text{Cov}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\zeta})=0$$

式 (2.1) 可以写成

$$\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{Y}=\mathbf{\Gamma}\mathbf{X}+\boldsymbol{\zeta}$$

因而有

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{Y} &= \mathbf{\Gamma}\mathbf{X}+\boldsymbol{\zeta} \\ \mathbf{Y} &= (\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{\Gamma}\mathbf{X}+\boldsymbol{\zeta}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

总体协方差阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ (p 个内生变量, q 个外生变量) 为:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix} \text{Var}(\mathbf{Y}) \\ \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \text{Var}(\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

含有待估计参数 θ 的协方差阵 $\boldsymbol{\Sigma}(\theta)$ 如式 (2.9)。

$$\boldsymbol{\Sigma}(\theta)=\begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}'+\boldsymbol{\Psi})(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1'} \\ \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}'(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1'} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\because \text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{v}) = \mathbf{A}\text{Cov}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{B}'$$



$$\begin{aligned}
 \therefore E(Y Y') &= (I - B)^{-1} \text{Cov}(\Gamma X + \zeta, \Gamma X + \zeta) (I - B)^{-1'} \\
 &= (I - B)^{-1} (\Gamma \Phi \Gamma' + \Psi) (I - B)^{-1'} \\
 \text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(X, (I - B)^{-1} (\Gamma X + \zeta)) \\
 &= \Phi \Gamma' (I - B)^{-1'}
 \end{aligned}$$

式中， Φ 是 X 的协方差阵； Ψ 是扰动项 ζ 的协方差阵。

若 Σ 利用样本协方差阵 S 代替，则可以利用 S 与 $\Sigma(\theta)$ 建立协方差方程，组成 $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$ 个方程。若 θ 中含有 t 个参数，则 t 与方程个数应有一定的关系。因此，根据因果模型协方差阵，可以建立待估计参数个数与方程个数的关系，以判断模型参数是否能够估计。

【例 2.3】有模型如式 (2.10)。

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_2 + x_1 \\
 y_2 &= \beta_{21} y_1 + \zeta_2
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

假定 $\text{Cov}(\zeta_2, x_1) = 0$ ，则按照式 (2.1) 有

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} \end{bmatrix} \quad \Phi = [\phi_{11}]$$

可以看出，有三个待估计的参数： β_{21} ， ϕ_{11} ， ψ_{22} 。

分析：利用 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ ，即有

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \text{Var}(y_1) \\ \text{Cov}(y_2, y_1) & \text{Var}(y_2) \\ \text{Cov}(x_1, y_1) & \text{Cov}(x_1, y_2) & \text{Var}(x_1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1 - \beta_{21})^{-2} (\phi_{11} + \psi_{22}) & & \\ & (1 - \beta_{21})^{-2} (\beta_{21}^2 \phi_{11} + \psi_{22}) & \\ & & (1 - \beta_{21})^{-1} \phi_{11} \end{bmatrix} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

利用式 (2.11) 相应元素相等得到

$$\text{Var}(x_1) = \phi_{11}$$

可以求出 ϕ_{11} 。根据

$$\text{Cov}(x_1, y_1) = (1 - \beta_{21})^{-1} \phi_{11}$$



可以求出 β_{21} 。再由

$$\text{Var}(y_1) = (1 - \beta_{21})^{-2}(\phi_{11} + \psi_{22})$$

可以求出 ψ_{22} 。这样，三个待估计的参数均可以得到。

二、模型识别的分类

因果模型的识别一般来说可能有三种情况：恰好识别、过度识别和不可识别。恰好识别是模型参数的个数与方程个数相等，即模型正好识别的情况。过度识别也称为超识别，是模型参数的个数小于方程个数，模型参数估计时，有些方程可能没有用的情况。不可识别是模型参数的个数大于方程个数，模型参数无法得到有效估计，是模型无法识别的情况。

三、模型整体的识别方法

因果模型一般由多个方程构成，因此，模型识别可以分为对模型整体识别和对单个方程识别。对模型整体识别，通常采用 t 规则、零 B 规则和递归规则。对单个方程识别则采用阶条件和秩条件。

1. t 规则

从模型的一般式看，总体方差—协方差阵中 p 个内生变量有： $\text{Var}(y_1)$ ， $\text{Var}(y_2)$ ， \dots ， $\text{Var}(y_p)$ ， p 个方差； q 个内生变量有： $\text{Var}(x_1)$ ， $\text{Var}(x_2)$ ， \dots ， $\text{Var}(x_q)$ ， q 个方差； $\text{Cov}(X, Y)$ 为交叉项，再加上 1 个误差项，有 $p+q+1$ 项；因此，总体方差—协方差阵 Σ 中共有 $(p+q)(p+q+1)$ 项。 Σ 是对角阵，所以能够建立的方程个数为 $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$ ，设 t 为 θ 中带有的待估计参数个数，对于因果模型有 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ ，因此，若要 t 个参数有解，必须满足参数的个数小于等于方程的个数，即有

$$t \leq \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) \quad (2.12)$$

满足式 (2.12)，模型才能识别。这就是模型识别的 t 规则，是识别的必要条件。

以例 2.3 模型为例：

$$y_1 = y_2 + x_1 \quad y_2 = \beta_{21} y_1 + \zeta_2$$



其中,

$$\text{Cov}(x_1, \zeta_2) = 0 \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Phi} = [\phi_{11}]$$

模型中, 待估计参数为 β_{21} , ψ_{22} , ϕ_{11} , 即 $t=3$; 模型中内生变量 \mathbf{Y} 的个数为 2, 外生变量 \mathbf{X} 的个数为 1, 即 $p=2$, $q=1$ 。

根据 $\Sigma = \Sigma(\theta)$, 有

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(y_1) & & \\ \text{Cov}(y_2, y_1) & \text{Var}(y_2) & \\ \text{Cov}(x_1, y_1) & \text{Cov}(x_1, y_2) & \text{Var}(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\beta_{21})^{-2}(\phi_{11} + \psi_{22}) & & \\ & (1-\beta_{21})^{-2}(\beta_{21}^2\phi_{11} + \psi_{22}) & \\ (1-\beta_{21})^{-1}\phi_{11} & & \phi_{11} \end{bmatrix}$$

式中, 等号左边总体协方差包含有 $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)=6$, 即有 6 个方程; 等号右边有 3 个待估计参数, 即 $t=3$, 从例 2.3 的分析可知, ϕ_{11} , β_{21} 以及 ψ_{22} , 均可以得到有效估计。按 t 规则, 待估计的参数个数小于方程的个数, 即

$$t=3 < \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)=6$$

模型是可以估计的, 即模型可识别。

[例 2.4] 对式 (2.13) 的模型进行识别。

分析: 式 (2.13) 为:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ 0 & \gamma_{22} \\ \gamma_{31} & 0 \end{bmatrix} \quad p=3 \quad q=2$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

待估计参数由 \mathbf{B} , $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Psi}$ 中的元素确定。



其中, B 中有 3 个参数, Γ 中有 3 个参数, $\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$ 有 3 个参数,

$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{32} & 0 \end{bmatrix}$ 有 1 个参数, 故 $t=3+3+1+3=10$ 。

方程的个数为:

$$\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) = \frac{1}{2}(3+2)(3+2+1) = 15$$

由于 $t=10 < \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) = 15$, 因此, 模型可以识别。

2. 零 B 规则

这是模型识别的充分条件。

若 $B=0$, 则有 $I-B=I$, 按照 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 和式 (2.9) 有

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(Y) & \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma\Phi\Gamma' + \Psi & \\ \Phi\Gamma' & \Phi \end{bmatrix}$$

由 $\text{Var}(X)=\Phi$, 可求出 Φ ; $\text{Cov}(X, Y)=\Phi\Gamma'$, 可求出 Γ ; $\text{Var}(Y)=\Gamma\Phi\Gamma'+\Psi$, 可求出 Ψ 。由于参数均可以求出, 模型可识别。实际上, 若 $B=0$, 即没有内生变量作自变量, 也就是原因变量全部是外生变量的模型, 则 $Y=BY+\Gamma X+\zeta$ 就成为 $Y=\Gamma X+\zeta$, 这里每一个方程, 就是一般的线性回归方程, 因此模型可以识别。

3. 递归规则

递归模型是可识别的。这也是充分条件。

递归模型只有单向的因果关系, B 是下三角阵。递归模型所有残差不相关, 因而 Ψ 是对角阵。在递归模型中, 第 i 个方程的随机干扰项与此方程作为解释变量的内生变量不相关。

对于如式 (2.1) 的递归模型, 第 i 个方程有:

$$y_i = [\beta_i' | \gamma_i'] z_i + \zeta_i$$

式中, β_i' 为 B 中第 i 行不是 0 的元素组成; z_i 是与第 i 个方程对应的不是 0 的原因变量组成, 包括内、外生变量。

上式两边同时乘以 z_i' , 有



$$y_i z_i' = [\beta_i' | \gamma_i'] z_i z_i' + \zeta_i z_i'$$

由于

$$\text{Cov}(\zeta_i, z_i') = 0$$

两边同时取期望，得到

$$E(y_i z_i') = [\beta_i' | \gamma_i'] E(z_i z_i') + 0$$

因为 $E(y_i z_i')$ 和 $E(z_i z_i')$ 已知，所以，可以求出 $\beta_i' | \gamma_i'$ ，即参数可以估计。

这表明，递归模型都是可以识别的。

四、单个方程识别的方法

1. 阶条件

阶条件 (order conditions) 是模型识别的必要条件。

若有 p 个内生变量， q 个外生变量，对于每一个方程，不在此方程的内生变量和外生变量的数目和大于等于 $p-1$ ，则该方程就可能被识别。对于如式 (2.1) 的模型：

$$Y = BY + \Gamma X + \zeta$$

第 i 个方程记为：

$$y_i = [\beta_i' | \gamma_i'] z_i + \zeta_i$$

记 z_i 为：

$$z_i = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_p \\ x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix}$$

在 z_i 中，去掉了第 i 个内生变量。上式两边同时乘以 X' ，有

$$y_i X' = [\beta_i' | \gamma_i'] z_i X' + \zeta_i X'$$



由于 $E(\zeta_i)=0$ ，两边同时取期望，有

$$E(y, \mathbf{X}') = [\beta_i' | \gamma_i'] E(z, \mathbf{X}')$$

等式左边为 $1 \times q$ ，等式右边为 $(p+q-1) = (p-1) + q$ ，若要等号成立，需要有 $(p-1)$ 个限制条件，才能使方程有解；也就是说，此方程中的待估计参数个数小于等于 $p-1$ ，参数可以估计；即不在此方程的内生、外生变量数目大于或等于 $p-1$ ，方程可识别。

[例 2.5] 对如图 2—8 的模型进行识别。

分析：根据图 2—8 可以看出 x_1 为外生变量，还有 3 个内生变量，故 $p-1=2$ 。由图写出因果模型如式 (2.14)。

$$\begin{aligned} x_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{24}x_4 + \varepsilon_2 \\ x_3 &= \beta_{32}x_2 + \varepsilon_3 \\ x_4 &= \beta_{43}x_3 + \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (2.14)$$

对于其中第一个方程来说，只有一个变量 x_3 不在此方程。由于不在此方程的内生变量和外生变量的数目和为 1，小于 $p-1=2$ ，不满足阶条件，该方程不可识别。虽然后两个方程可以识别，但整个模型是不可识别的。

[例 2.6] 对如图 2—9 的模型进行识别

分析：根据图 2—9 可以看出这是一个非递归模型，有 2 个内生变量，故 $p-1=1$ 。由图写出因果模型如式 (2.15)。

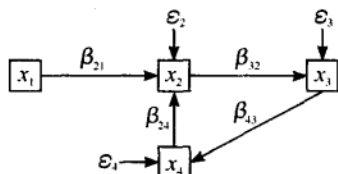


图 2—8 一个模型的路径图

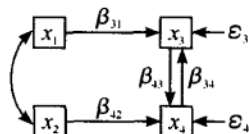


图 2—9 一个模型的路径图

$$\begin{aligned} x_3 &= \beta_{31}x_1 + \beta_{34}x_4 + \varepsilon_3 \\ x_4 &= \beta_{42}x_2 + \beta_{43}x_3 + \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (2.15)$$

从式 (2.15) 可以看出，两个方程中每个方程均只有 1 个变量不在此方程，满足阶条件，每个方程都可能被识别。阶条件是模型识别的必要条件。因此，虽然每个方程都满足阶条件，但不一定就真正能够识别。

当模型中变量数目较多时，也可以采用下面的方法运用阶条件进行识



别。将模型中每个方程的残差项移至等号左边，将原等号左边变量移至右边，即将 $Y = BY + \Gamma\xi + \zeta$ 写成 $\zeta = (I - B)Y - \Gamma\xi$ ，然后将所有系数（没有的变量系数为零）抽取出来，形成一个新的矩阵 C ，也就是， C 为 $I - B$ 和 Γ 按左右排列形成的矩阵。阶条件就是逐行检查 C 的零元素的个数，如果某行至少有 $p-1$ 个零，则满足阶条件，即该方程可能识别，如果有少于 $p-1$ 个零，则不满足阶条件。

例 2.5 的模型可以改写成下面的形式：

$$\varepsilon_2 = x_2 - \beta_{24}x_4 - \beta_{21}x_1$$

$$\varepsilon_3 = -\beta_{32}x_2 + x_3$$

$$\varepsilon_4 = -\beta_{43}x_3 + x_4$$

将等号右边的系数写成矩阵 C 为：

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_{24} & -\beta_{21} \\ -\beta_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{43} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看出，第一行零元素个数小于 $p-1=2$ ，不满足阶条件，不可识别；后两行每行的零元素个数均为 2，等于 $p-1=2$ ，满足至少有 $p-1$ 个零，即满足阶条件，可能识别。

2. 秩条件

秩条件 (rank conditions) 是模型识别的充分条件。

将矩阵 $I - B$ ， $-\Gamma$ ，左右并排放在一起，形成一个新的矩阵 C ，即有

$$C = (I - B, -\Gamma)$$

判别第 i 个方程是否可识别：将矩阵 C 中第 i 行不为零的元素所在的列划掉，剩余阵的秩 $C_i = p-1$ ，则方程可识别。

[例 2.7] 对例 2.6 的模型式 (2.15) 进行识别。

分析：式 (2.15) 为：

$$x_3 = \beta_{31}x_1 + \beta_{34}x_4 + \varepsilon_3$$

$$x_4 = \beta_{42}x_2 + \beta_{43}x_3 + \varepsilon_4$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{34} \\ \beta_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \beta_{31} & 0 \\ 0 & \beta_{42} \end{bmatrix}$$



$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{34} & -\beta_{31} & 0 \\ -\beta_{43} & 1 & 0 & -\beta_{42} \end{bmatrix}$$

第一个方程, $i=1$, 将第一行所有非零元素所在列划去, 剩余阵 $C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta_{42} \end{bmatrix}$, 秩为 1。

第二个方程, $i=2$, 将第二行所有非零元素所在列划去, 剩余阵 $C_2 = \begin{bmatrix} -\beta_{31} \\ 0 \end{bmatrix}$, 秩为 1。

有 2 个内生变量 x_3, x_4 , 故 $p-1=1$, 两个方程都满足秩条件, 模型可识别。

3. 小结

因果模型识别, 对模型整体识别采用 t 规则、零 B 规则和递归规则; 对单个方程识别采用阶条件和秩条件。阶条件和秩条件适用于 $I-B$ 为可逆矩阵, 且 Ψ 不加任何约束的非递归模型。对于非递归模型, 若每个方程都可识别, 则模型可识别。

第三节 因果模型的建立

一、模型设定与参数估计

1. 模型设定

依据已有理论或经验, 确定变量之间关系, 通常可以先画出路径图, 再根据路径图写出模型。

2. 参数估计

如果因果模型是递归的, 每个方程与观测变量 (假定不考虑测量误差) 是线性的, 则可以对每个方程分别采用最小二乘法, 估计出所有路径系数。

但是对于一般的因果模型无法采用这一方法。通常采用最大似然估计 (ML)、未加权最小二乘估计 (ULS)、一般加权最小二乘估计 (GWLS)、对角加权最小二乘估计 (DWLS)、广义最小二乘估计 (GLS) 等。这些估计方法的基本思路一样, 都是给出参数 β, γ 一组初始值, 按式 (2.1) 计算出 Y 的预测值, 以及残差 ζ 。令 S 是样本 Y 的方差-协方差阵, $\Sigma(\theta)$ 是预测



值的方差—协方差阵。如果 S 与 $\Sigma(\theta)$ 没有接近到一定程度，即残差项之间的相关系数没有小到一定程度（一般来说，残差项之间不相关，表明模型已经很好地拟合样本数据。因此，残差项之间的相关程度通常可以作为模型评价的一个标准），则再给出参数的另一组估计值，进行计算。不断重复上面的过程，直到 S 与 $\Sigma(\theta)$ 的接近程度或残差项之间的相关系数满足一定小的精度要求为止。这种用迭代法寻求一定精度估计值的方法，不仅用于因果模型的估计，对于包括结构方程模型在内的很多模型都适用。 S 与 $\Sigma(\theta)$ 接近程度的不同计算公式，形成了不同的估计方法。

(1) 最大似然估计 (ML)

S 与 $\Sigma(\theta)$ 的接近程度通常用拟合函数表述。最大似然估计的拟合函数如式 (2.16)。

$$F_{ML} = \log |\Sigma(\theta)| + \text{tr}(S\Sigma^{-1}(\theta)) - \log |S| - (p+q) \quad (2.16)$$

式中， $\text{tr}(S\Sigma^{-1}(\theta))$ 是矩阵 $(S\Sigma^{-1}(\theta))$ 的迹，即矩阵的对角线元素之和； $\log |S|$ 表示矩阵 S 的行列式的对数。

在大样本情况下，若 S 与 $\Sigma(\theta)$ 越接近，即 $\log |\Sigma(\theta)|$ 与 $\log |S|$ 越接近， F_{ML} 越小。使得 F_{ML} 达到最小值的估计 $\hat{\theta}$ 就是最大似然估计。

(2) 未加权最小二乘估计 (ULS)

未加权最小二乘估计的拟合函数如式 (2.17)。

$$F_{ULS} = \frac{1}{2} \text{tr}[(S - \Sigma(\theta))^2] \quad (2.17)$$

式中， $[(S - \Sigma(\theta))^2]$ 是残差矩阵 $(S - \Sigma(\theta))$ 中全部元素的平方和构成的矩阵。这有点类似于最小二乘估计，但它不是考虑各个观测值与模型估计值之间的距离，而是考虑样本数据计算得到的方差—协方差阵 S 与参数估计值计算得到的方差—协方差阵之间的距离。

使 F_{ULS} 达到最小值的估计 $\hat{\theta}$ 称为未加权最小二乘估计。

(3) 广义最小二乘估计 (GLS)

广义最小二乘估计的拟合函数如式 (2.18)。

$$F_{GLS} = \frac{1}{2} \text{tr}\{[(S - \Sigma(\theta))] W^{-1}\} \quad (2.18)$$

使 F_{GLS} 达到最小值的估计 $\hat{\theta}$ ，称为广义最小二乘估计。其中，权重通常取



$$W^{-1} = S^{-1}。$$

二、模型检验与评价

1. 参数的显著性检验

因果模型的参数检验与回归分析中参数的显著性检验一样，也是对参数与零是否有显著性差异进行检验。检验统计量为 t 统计量，即参数的估计值与其近似标准误差的比值。当样本数足够大时， t 统计量渐近服从 t 分布，这样就可以运用回归分析中同样的 t 检验标准进行检验。

2. 参数的合理性评价

因果模型的参数除进行显著性检验外，还需要对其取值的合理性作出判断。因果模型参数与回归系数类似，也有非标准化与标准化两类。若观测变量没有经过标准化处理直接进行参数估计，得到的是非标准化系数；经过标准化处理再进行参数估计，则得到标准化系数。标准化系数还可以通过非标准化系数按式 (2.19) 计算得到。

$$\beta'_{ij} = \beta_{ij} S_{\beta_{ij}} / S_{y_i} \quad (2.19)$$

其中， β_{ij} 是变量 x_j 的系数估计值； $S_{\beta_{ij}}$ 是系数 β_{ij} 的估计标准误差； S_{y_i} 是变量 y_i 的标准差。

非标准化系数有量纲，即有计量单位，因此有实际意义。它与线性回归中的回归系数一样，表明当一个变量变化一个单位时，所引起的另一个变量的平均变动单位量；但它无法在同一模型中进行相互比较。标准化系数消除了量纲的影响，可以在同一模型中比较一个变量对另一个变量的相对重要性，绝对值越大，影响作用越大，贡献越大。但是，标准化系数没有实际意义。

三、效应分解

在路径分析中，关于效应讨论了直接效应和间接效应。实际上，按照协方差与相关系数的关系，还可以利用路径分析技术对效应分解，进行更深入的讨论。当测量变量已经进行标准化处理，协方差就是相关系数，效应分解也就是相关系数分解，是将变量之间的相关系数分解为不同的效应。变量之间的相关按其形成，可以分为因果效应、虚假效应和未析效应。

1. 因果效应

因果效应是由于变量之间存在一定的因果关系而产生的影响作用，包括



直接效应和间接效应。直接效应和间接效应的总和是总效应。这是讨论因果模型最关注的效应。

【例 2.8】 将因果模型如式 (2.20)、式 (2.21)，进行效应分解。

$$y_1 = \gamma_{11}x_1 + \zeta_1 \quad (2.20)$$

$$y_2 = \beta_{21}y_1 + \gamma_{21}x_1 + \zeta_2 \quad (2.21)$$

式中, $\text{Cov}(\zeta_1, \zeta_2) = 0$; $\text{Cov}(x_1, \zeta_1) = 0$; $\text{Cov}(x_1, \zeta_2) = 0$; 即 ζ_1 和 ζ_2 以及 x_1 与 ζ_1 及 ζ_2 都不相关。

分析: 根据模型可以画出路径图, 如图 2—10。

由图可知, y_1 是 x_1 到 y_2 的介入变量, x_1 对于 y_2 的效应: 直接效应 γ_{21} ; 间接效应为 $\gamma_{11}\beta_{21}$; 总效应为 $\gamma_{21} + \gamma_{11}\beta_{21}$ 。

如果式 (2.21) 中 y_1 变量省略, 模型为:

$$y_2 = \gamma_{21}x_1 + \zeta_2^* \quad (2.22)$$

其中 $\zeta_2^* = \beta_{21}y_1 + \zeta_2$
则

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_1, \zeta_2^*) &= \text{Cov}(x_1, \beta_{21}y_1 + \zeta_2) \\ &= \text{Cov}[x_1, \beta_{21}(\gamma_{11}x_1 + \zeta_1) + \zeta_2] \\ &= \beta_{21}\gamma_{11}\text{Var}(x_1) \end{aligned} \quad (2.23)$$

式中, $\text{Var}(x_1)$ 是正的, $\beta_{21} \neq 0$, $\gamma_{11} \neq 0$, 则 $\text{Cov}(x_1, \zeta_2^*) \neq 0$, 与假定是违背的。若违背 $\text{Cov}(x_1, \zeta_2^*) = 0$ 的假定, 对式 (2.22) 采用最小二乘估计 (OLS), 则有

$$\hat{\gamma}_{21}^* = \frac{\text{Cov}(y_2, x_1)}{\text{Var}(x_1)}$$

$$\begin{aligned} \text{有 } \text{plim}(\hat{\gamma}_{21}^*) &= \text{plim}\left[\frac{\text{Cov}(y_2, x_1)}{\text{Var}(x_1)}\right] \\ &= \frac{\text{Cov}(y_2, x_1)}{\text{Var}(x_1)} = \frac{\text{Cov}(\gamma_{21}x_1 + \zeta_2^*, x_1)}{\text{Var}(x_1)} \\ &= \frac{\text{Cov}(\gamma_{21}x_1, x_1) + \text{Cov}(\zeta_2^*, x_1)}{\text{Var}(x_1)} = \gamma_{21} + \beta_{21}\gamma_{11} \end{aligned}$$

结果不收敛于 γ_{21} 。

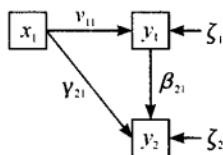


图 2—10 一个模型的路径图



实际上, $\hat{\gamma}_{21}$ 是 x_1 对于 y_2 的直接效应, 总效应是 $\gamma_{21} + \beta_{21}\gamma_{11}$ 。可以看出, 将 y_1 省略是不行的。由于忽略, 使得参数估计得到的结果 $\hat{\gamma}_{21}$ 不是直接效应, 而是总效应。

2. 虚假效应

虚假效应是指两个内生变量的相关系数中, 由于共同的起因产生影响作用的部分。

[例 2.9] 对图 2—11 所示的模型进行效应分解。

分析: 为书写方便, 图中所有变量均用 X 表示, 测量值均已标准化。

由图 2—11 可以写出因果模型如式 (2.24)。

$$\begin{aligned} x_4 &= \beta_{41}x_1 + \beta_{42}x_2 + \epsilon_4 \\ x_5 &= \beta_{53}x_3 + \beta_{54}x_4 + \epsilon_5 \end{aligned} \quad (2.24)$$

效应分解可以利用变量间的协方差矩阵计算。由于测量变量已经进行标准化处理, 协方差就是相关系数, 因此变量 x_4 与 x_1 之间的相关系数为:

$$\begin{aligned} r_{41} &= \text{Cov}(x_4, x_1) \\ &= \text{Cov}(\beta_{41}x_1 + \beta_{42}x_2 + \epsilon_4, x_1) \end{aligned}$$

由图 2—11 可知, $x_1 = \epsilon_1$, 而残差项与其余变量间不相关, 因此有

$$\begin{aligned} r_{41} &= \beta_{41} \text{Cov}(x_1, x_1) + \beta_{42} \text{Cov}(x_2, \epsilon_1) + \text{Cov}(\epsilon_4, \epsilon_1) \\ &= \beta_{41} \text{Cov}(x_1, x_1) \\ &= \beta_{41} r_{11} \\ &= \beta_{41} \end{aligned}$$

变量 x_4 与 x_1 之间的相关系数就是路径系数, 是直接效应。从路径图可以看出, x_4 与 x_1 只有直接效应, 没有间接效应。

变量 x_4 与 x_5 之间的相关系数为:

$$\begin{aligned} r_{45} &= \text{Cov}(x_4, \beta_{53}x_3 + \beta_{54}x_4 + \epsilon_5) \\ &= \beta_{53} \text{Cov}(x_4, x_3) + \beta_{54} \text{Cov}(x_4, x_4) + \text{Cov}(x_4, \epsilon_5) \\ &= \beta_{53} r_{43} + \beta_{54} \end{aligned}$$

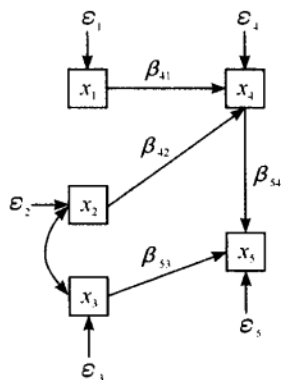


图 2—11 一个模型的路径图



其中, β_{54} 是 x_4 与 x_5 的路径系数, 是 x_4 对 x_5 的直接影响作用。从相关的角度看, r_{45} 应该反映 x_4 与 x_5 之间的相关, 因为它们中间没有介入的中间变量, 其相关系数就是直接效应, 即 x_4 到 x_5 的路径系数。但从式中可以看到, x_4 与 x_5 之间的相关系数还有一部分, 即 $\beta_{53}r_{43}$ 。 x_3 和 x_4 之间从路径图看, 并不存在真正的内在相关关系。 x_4 与 x_5 之间的这部分相关就是虚假相关, 是受两个相关因素的影响产生, 即 x_2 与 x_3 存在相关, 而 x_2 影响 x_4 , x_3 影响 x_5 , 由此产生的效应被称作虚假效应。

[例 2.10] 图 2-12 所示模型的效应分解。

分析: 由图 2-12 可以写出模型如式 (2.25)。

$$x_3 = \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \epsilon_3 \quad (2.25)$$

变量 x_2 与 x_3 的相关系数如式 (2.26)。

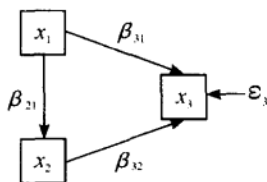


图 2-12 一个模型路径图

$$\begin{aligned} r_{23} &= \text{Cov}(x_2, x_3) \\ &= \text{Cov}(x_2, \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \epsilon_3) \\ &= \beta_{31}\text{Cov}(x_2, x_1) + \beta_{32}\text{Cov}(x_2, x_2) + \text{Cov}(x_2, \epsilon_3) \\ &= \beta_{31}r_{21} + \beta_{32} \\ &= \beta_{31}\beta_{21} + \beta_{32} \end{aligned} \quad (2.26)$$

从式 (2.26) 可以看出, x_2 与 x_3 之间的相关系数包含两部分, 一部分是 x_2 对 x_3 的直接作用, 即直接效应; 另一部分是两个路径系数的乘积。一般来说, 间接效应是一个变量通过另一个变量或几个变量对结果变量的影响, 因此路径系数的右下标, 即反映原因变量的下标是能够连通的, 它们依作用的传递顺序排列。式 (2.26) 中, 这部分两个路径系数的下标没有连通关系。它不是间接效应, 也是虚假效应。这是由于 x_2 与 x_3 有一个共同的原因变量 x_1 而带来的结果。

虚假相关或虚假效应, 只产生在两个内生变量之间, 也就是两个内生变量相关系数分解 (或效应分解) 时, 可能会有虚假现象。虚假效应中可能带有相关系数, 也可能仅为路径系数。当产生虚假效应的原因是受共同变量的影响时, 虚假效应仅为路径系数 (乘积), 如例 2.10; 当产生虚假效应的原因是受两个变量相关的影响时, 虚假效应中有用路径系数无法替代的相关系数, 如例 2.9。



3. 未析效应

未析效应是一个外生变量与一个内生变量的相关系数中, 除去直接和间接效应外剩余的部分。

[例 2.11] 图 2—13 所示模型的效应分解。

分析: 由图可以看出, 该模型类似于式 (2.24)。只不过图 2—11 中, 变量 x_1 与 x_2 不相关, 而图 2—13 中, 两个变量间相关。考虑外生变量 x_1 与内生变量 x_4 之间的相关系数如式 (2.27)。

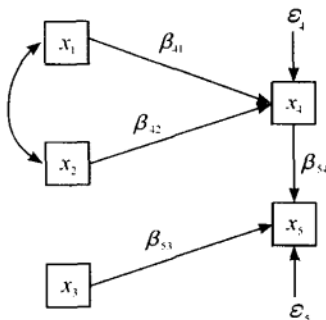


图 2—13 类似图 2—11 的路径图

$$\begin{aligned}
 r_{14} &= \text{Cov}(x_1, x_4) \\
 &= \text{Cov}(x_1, \beta_{41}x_1 + \beta_{43}x_3 + \epsilon_4) \\
 &= \beta_{41}\text{Cov}(x_1, x_1) + \beta_{43}\text{Cov}(x_1, x_3) + \text{Cov}(x_1, \epsilon_4) \\
 &= \beta_{41} + \beta_{43}r_{13}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

从式 (2.27) 可知, β_{41} 是变量 x_1 对 x_4 的直接效应, 而 $\beta_{43}r_{13}$ 是未析效应。它是由于相关的外生变量 x_1 与 x_2 对内生变量 x_4 的影响产生。由于未析效应是外生变量间相关引起, 因而, 其一定含有外生变量间的相关系数。如果外生变量间不相关, 则不会有未析效应。





结构方程模型设定

第一节 理论模型的设定

一、理论模型构建的基础

(一) 潜变量的确定

结构方程模型是带有潜变量的一种验证性因子分析方法，模型需要依据已有的经验或理论事先设定，也称为假设模型。潜变量确定是结构模型建立的基础。潜变量可以根据对实际问题的理论认识确定，也可以借助探索性因子分析的结果构造。

1. 依据相关理论或经验确定

一般来说，根据研究的主题确定各个潜变量，并依据已有理论或经验，构建潜变量之间的关系，这就是依据相关理论或经验确定潜变量并设定结构模型。

潜变量的确定必须首先界定该潜变量的含义、内容、界定范围等，一般最好利用现有的、公认的定义。

[例 3.1] 居民医疗消费行为和意愿的影响因素——潜变量确定。

分析：(1) 理论分析。

要对居民医疗消费行为和意愿进行定量研究，必须首先分析医疗消费行



为的影响因素。影响医疗消费行为的因素有许多,不同的因素产生的作用不同,表现为居民对各种医疗服务利用方面的差异。同时各种因素之间又存在着错综复杂的关系,相互作用,共同对居民消费行为产生影响。根据以往研究的结果,大致有以下几个方面。

1) 医疗服务的需要因素。医疗服务的需要因素指居民的健康状况和对健康的认识。之所以用健康状况反映对医疗服务的需要,是因为人们往往在自身健康受到损害或自认为健康状况不佳,影响正常的生活和工作,自己又无力解除这种状况时,才会利用医疗服务。它是医疗服务利用的前提条件。

2) 居民自身的基本因素。居民自身的基本因素包括个人特征和社会特征。个人特征指性别、年龄、家庭类型等;社会特征指职业、文化程度等。这些因素主要通过人们的消费偏好而作用于其医疗消费行为。

3) 医疗服务利用的制约因素。医疗服务利用的制约因素主要包括经济因素、医疗服务提供情况和医疗保险因素等。经济因素指居民家庭人均可支配收入、家庭财产、家庭消费支出情况等;医疗服务提供情况指医疗机构的设施、医疗服务技术、医疗服务价格等;医疗保险因素指医疗保障类型、医疗费用分担比例等。

居民医疗消费行为和意愿在很大程度上受医疗服务利用的制约因素影响。医疗服务的需要因素是影响医疗消费行为的必要因素,认识到自身处于非健康状态有可能进行医疗消费;居民自身的基本因素会影响其消费行为,但是真正对消费行为和意愿起作用的还是家庭经济状况、医疗机构提供的服务水平等。因此,影响居民医疗消费行为和意愿的主要因素是医疗服务利用的制约因素。

(2) 变量的选择。

根据前面的理论分析,可以由医疗服务利用的制约因素构造研究的潜变量。

1) 经济因素。经济因素是指影响居民使用医疗消费的经济基础。这一因素包括居民家庭人均可支配收入、家庭财产、家庭消费支出情况等,但是居民家庭财产这样的变量数据不易取得,因为居民家庭财产包括实物资产(主要是住宅、耐用消费品等)和金融资产(主要是现金、存款、有价证券等),通过居民医疗消费行为的调查无法取得这些资料。所以,经济因素变量可以反映在家庭平均月收入、个人医疗费用、子女医疗费用、老人医疗费用、住院费、药品费等。经济因素还可能与职业、行业等背景



有关。

2) 医疗服务提供情况。医疗服务提供是居民实现医疗消费的关键。居民对已提供的医疗服务,有何评价。各种服务项目中,哪些与居民的期望存在差距。这些都会影响居民医疗消费行为和意愿。

3) 医疗保险因素。医疗保险因素是指居民享受医疗保障的类型、程度等。

利用结构方程模型分析居民医疗消费行为和意愿,主要探讨居民对医疗服务的满意程度,另外两个因素可以作为背景进行对比分析。

(3) 变量确定。

在研究居民医疗消费行为与消费意愿时,需要分析居民对药品、诊疗费用等的期望,对医疗质量和效果等的满意程度,对享受医疗服务的感知、抱怨和忠诚度等。参照居民消费行为和消费心理的理论研究,考虑可以确定六个潜变量研究影响居民对医疗服务满意的因素、居民在享受医疗服务时最关心的方面。这六个潜变量为:患者期望、服务质量感知、服务价值感知、总体满意度、抱怨和忠诚。

人们对经济现象的研究,常常已经有一些关于潜变量的界定,如关于企业成长性 or 企业竞争力等的分析研究,已有理论界定了成长性竞争力的几个表现方面,每个方面包含哪些指标,运用结构方程模型分析各个方面的相互影响关系以及作出评价,可以借用这些理论研究成果。例如,研究上市公司的成长性,可以用一系列财务指标反映其盈利能力、偿债能力、资产管理能力、成长能力等,这几个能力就构成潜变量。

2. 利用探索性因子分析提取

当已经获得有关指标的数值,但并不清楚指标之间关系时,可以运用因子分析,从指标出发,寻找公共因子。若所提取的公共因子能够得到合理命名,即有合理解释,可以作为所研究问题的潜变量。

孙凤^①在研究居民主观幸福感时,运用了结构方程模型。其潜变量的构造是利用已有调查数据进行因子分析得到。从而将原测量“幸福感”的5个指标提炼成2个公共因子,分别命名为“工作幸福感”和“生活幸福感”;将原测量“社会公平”的5个指标提炼为2个公共因子,分别为“收入分

^① 孙凤:《主观幸福感的结构方程模型》,载《统计研究》,29页,2007(2),总第184期。



配”和“社会保障”。这样，研究居民主观幸福感可以借助探讨4个潜变量之间的关系加以说明。

利用因子分析确定潜变量时，由于公共因子通过正交旋转得到，因而在同一次因子分析中得到的公共因子之间没有关系，构建结构模型时要特别注意。如用因子分析将“幸福感”分成“工作幸福感”和“生活幸福感”，这两个潜变量之间不会有直线箭头的因果关系，也不会有弧形箭头的相关关系。

（二）可测变量的选择

结构方程的设定是理论模型建立的第一步，要使理论模型的关系得到验证，必须将每个潜变量以可测变量来测度。选择可测变量，是设定测量模型的过程，这是理论模型设定的第二步。可测变量选择是否适当，关系到潜变量的测度是否合理、准确，也关系到最后结论的合理性。因此，可测变量的选择对于模型构建至关重要。

可测变量是为反映潜变量而设置的，所选择的可测变量应全面反映潜变量所涵盖的内容。可测变量过少，可能信息不足，不能全面反映潜变量的含义；可测变量过多，其相互之间的相关可能性增大，使信息相互交叉，模型变得复杂不易处理，同时也会给数据的准确采集带来麻烦。一般来说，一个潜变量带有3个可测变量较为合适。当然，有时一个潜变量含义很清晰，也可能只用两个甚至一个可测变量就能够很好反映潜变量的含义。

[例 3.2] 为例 3.1 中的潜变量选择可测变量。

分析：患者期望是指居民享受医疗服务前对可能享受的医疗服务的一种预期。包括对药品费用的期望、诊疗费用的期望、对就诊方便程度的期望、对医院环境卫生状况的期望、对医院医疗设备的期望、对医护人员的专业水平的期望和对医护人员服务态度的期望等。

总体满意度是指居民对享受了医疗服务的总体满意度、费用支付满意度等。

服务质量感知，是居民实际接受医疗服务时，对药品费用、诊疗费用、就诊方便程度、医院环境卫生状况、医院医疗设备、医护人员的专业水平以及医护人员的服务态度的实际感受。

服务价值感知，是居民在医疗消费过程中，享受服务后，对付出这么多费用的实际感受。包括药费、治疗费用等。



抱怨是指居民享受医院提供的医疗服务后产生的结果，是否有投诉、发牢骚、提意见等行为。

忠诚度是指居民享受医疗服务后还愿意再次去以及愿意向别人推荐的可能性。

经过分析选择与各潜变量对应的可测变量如表 3—1，潜变量含义见式 (3.1)。

表 3—1 潜变量与可测变量对应表

潜变量	可测变量	潜变量	可测变量
ξ_1	x_1 : 就诊方便程度期望	η_1	y_8 : 享受医疗服务的总体满意程度
	x_2 : 就诊环境期望		y_9 : 对药品费用的满意程度
	x_3 : 医疗设备期望		y_{10} : 对诊疗费用的满意程度
	x_4 : 医护专业水平期望		
	x_5 : 医护服务态度期望	η_2	y_{11} : 给医院提意见次数
	x_6 : 药品费用预期		y_{12} : 给医院投诉情况
	x_7 : 诊疗费用预期		
η_1	y_1 : 就诊方便程度感受		
	y_2 : 就诊环境感受		
	y_3 : 医疗设备感受		
	y_4 : 医护专业水平感受		
	y_5 : 医护服务态度感受		
η_2	y_6 : 花钱享受服务是否值得的感受	η_3	y_{13} : 愿意再次就诊的可能性
	y_7 : 为治病花这么多钱是否值得的感受		y_{14} : 向别人推荐的可能性

对于已界定的潜变量，可以直接利用其包含的指标作为可测变量。如上市公司成长性研究中的盈利能力这一潜变量，其可测变量为每股收益、每股净资产、净资产收益率、资产利润率和净利润率。至于这些指标是否恰好反映盈利能力，指标之间有无重叠或交叉，可以借助定性分析考察，同时也可以在建模型后，通过模型修正加以分析。

二、理论模型构建

理论模型构建是在潜变量、可测变量都已设定的基础上，用路径图的形式将它们之间关系表述出来。

(一) 结构模型构建

结构模型是反映潜变量之间关系的方程。用第一章给出的各种记号，根据已有经验或理论确定的关系，利用路径图直观表示各个潜变量的关系走



向，就是设定结构模型。由路径图，可以写出结构模型的形式。

[例 3.3] 设定例 3.1 的结构模型。

分析：根据例 3.1 所确定的潜变量，讨论它们之间的相互关系，可以知道，在医疗服务这个系统中，期望是居民本身具有的，不受系统内其他因素影响，是外生潜变量；满意度受到系统内的其他因素影响，如居民实际享受服务后的感受，包括服务质量和价格，会影响满意程度，期望的高低也会影响满意，因而是内生的；抱怨和忠诚度反映居民享用医疗服务后满意的结果，也是内生的；居民的质量感知和价值感知都会受期望的影响，因而也是内生潜变量。

六个潜变量之间相互影响、相互制约。可以建立如下假设：

- H_1 ：“患者期望”对“满意度”具有正向影响；
- H_2 ：“患者期望”对“感知质量”具有正向影响；
- H_3 ：“患者期望”对“感知价值”具有正向影响；
- H_4 ：“质量感知”对“感知价值”具有正向影响；
- H_5 ：“质量感知”对“满意度”具有正向影响；
- H_6 ：“价值感知”对“满意度”具有正向影响；
- H_7 ：“抱怨”对“忠诚度”具有负向影响。

根据分析可以得到如图 3—1 的初始结构模型。

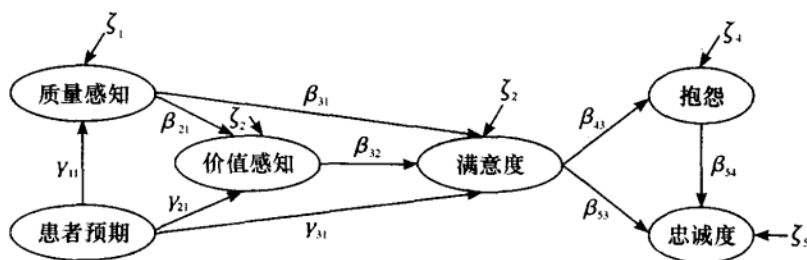


图 3—1 潜变量关系模型

若以 $\eta_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 表示模型的潜在内生变量，分别为居民接受医院医疗服务的质量感知、价值感知、满意度、抱怨以及忠诚度； ξ_1 表示模型的潜在外生变量，为居民在接受实际医疗服务之前对医院可能提供服务的预期，可以写出结构模型如式 (3.1)。

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta \quad (3.1)$$



式中,

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{53} & \beta_{54} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \quad \xi = [\xi_1] \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \end{bmatrix}$$

(二) 测量模型构建

将确定的潜变量与选择的可测变量之间关系以路径图形式表示出来,就是测量模型的设定。由路径图可以写出测量模型的形式。

[例 3.4] 居民医疗消费满意的测量模型。

由表 3—1 可以画出潜变量 ξ_1 和 η_1 的测量模型示意图,如图 3—2。

(三) 结构方程模型的理论模型构建

将结构模型与测量模型的路径图结合,完整地反映所要研究问题的各个潜变量之间关系,以及每个潜变量与可测变量之间、不同可测变量之间关系,就得到结构方程模型的理论模型。由路径图可以写出模型的形式。

[例 3.5] 例 1.3 中的工业化与政治民主关系。

根据例 1.3 设定的可测变量与潜变量以及它们之间的关系,可以构建理论模型,如图 3—3 所示。

由图 3—3,可以写出结构方程模型如式 (3.2a) 和式 (3.2b)。

结构模型:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \gamma_{11} \xi_1 + \zeta_1 \\ \eta_2 &= \beta_{21} \eta_1 + \gamma_{21} \xi_1 + \zeta_2 \end{aligned}$$

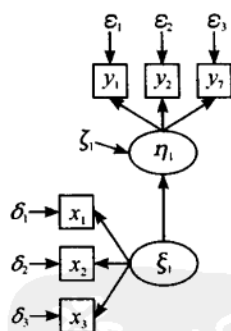


图 3—2 测量模型示意图



测量模型:

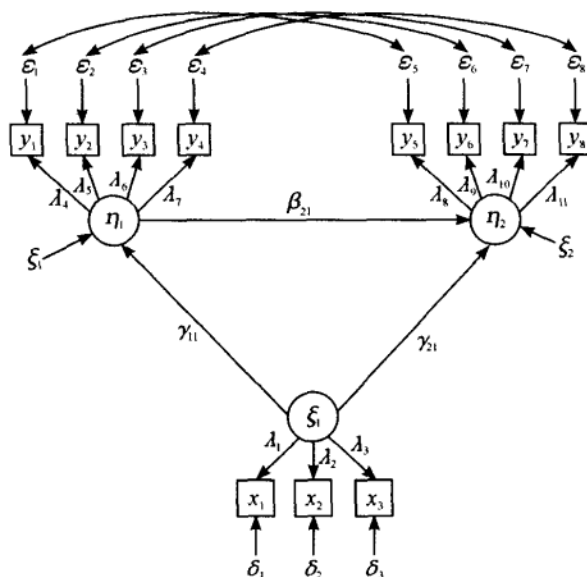


图 3—3 工业化与政治民主理论模型

$$x_1 = \lambda_1 \xi_1 + \delta_1$$

$$x_2 = \lambda_2 \xi_1 + \delta_2$$

$$x_3 = \lambda_3 \xi_1 + \delta_3$$

$$y_1 = \lambda_4 \eta_1 + \epsilon_1$$

$$y_2 = \lambda_5 \eta_1 + \epsilon_2$$

$$y_3 = \lambda_6 \eta_1 + \epsilon_3$$

$$y_4 = \lambda_7 \eta_1 + \epsilon_4$$

$$y_5 = \lambda_8 \eta_2 + \epsilon_5$$

$$y_6 = \lambda_9 \eta_2 + \epsilon_6$$

$$y_7 = \lambda_{10} \eta_2 + \epsilon_7$$

$$y_8 = \lambda_{11} \eta_2 + \epsilon_8$$

(3.2a)

式中, ϵ_1 与 ϵ_5 相关; ϵ_2 与 ϵ_6 相关; ϵ_3 与 ϵ_7 相关; ϵ_4 与 ϵ_8 相关。

也可以写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}$$



$$Y = \Lambda_y \eta + \varepsilon$$

$$X = \Lambda_x \xi + \delta$$

式中,

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad \xi = [\xi_1] \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \Lambda_x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_8 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_y = \begin{bmatrix} \lambda_4 & 0 \\ \lambda_5 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \\ \lambda_7 & 0 \\ 0 & \lambda_8 \\ 0 & \lambda_9 \\ 0 & \lambda_{10} \\ 0 & \lambda_{11} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_8 \end{bmatrix} \quad (3.2b)$$

第二节 模型的基本假定

一、全模型的假定

全模型同时包含外生、内生变量,它是带有潜变量和可测变量的结构方程模型的一般形式,也称完整模型。全模型的两部分为:

结构模型

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta \quad (3.3)$$

式中, $E(\eta) = 0$; $E(\xi) = 0$; $E(\zeta) = 0$; $\text{Cov}(\zeta, \xi) = 0$ 。



测量模型

$$Y = \Lambda_y \eta + \varepsilon \quad (3.4)$$

$$X = \Lambda_x \xi + \delta \quad (3.5)$$

式中, $E(\varepsilon) = 0$; $E(\delta) = 0$; ε 与 η , ξ 和 δ 无关; δ 与 ξ , η 和 ε 无关。在全模型中, 有八个矩阵: B , Γ , Λ_y , Λ_x , Φ , Ψ , Θ_ε , Θ_δ , 各个符号的含义同第一章。这些都是待估计的参数。

二、可测变量的假定

1. 假定可测变量无测量误差

可测变量无测量误差, 即可以由潜变量完全解释。这时, 可测变量不带有随机干扰项, 模型的形式就会发生变化。

若设式 (3.4) 和式 (3.5) 中潜变量的系数均为 1, 即有 $\Lambda_y = I_p$, $\Lambda_x = I_q$; 可测变量无测量误差, 即 $\Theta_\delta = 0$, $\Theta_\varepsilon = 0$ 。则有式 (3.6)。

$$\begin{aligned} Y &= BY + \Gamma X + \zeta \\ Y &= \eta \\ X &= \xi \end{aligned} \quad (3.6)$$

式中, $E(\xi) = E(\zeta) = 0$; $\text{Cov}(\xi, \zeta) = 0$ 。

式 (3.6) 实际上就是因果模型。

$$Y = BY + \Gamma X + \zeta$$

2. 假定可测变量带有测量误差, 但潜变量的系数均为 1

如果可测变量有测量误差, 但式 (3.3) 和式 (3.4) 中潜变量的系数均为 1, 即

$$\Lambda_y = I_p, \Lambda_x = I_q, \Theta_\delta \neq 0, \Theta_\varepsilon \neq 0$$

则有

$$\begin{aligned} \eta &= B\eta + \Gamma\xi + \zeta \\ Y &= \eta + \varepsilon \\ X &= \xi + \delta \end{aligned} \quad (3.7)$$

式中, $E(\zeta) = E(\xi) = 0$; $\text{Cov}(\zeta, \xi) = 0$; ε 与 η , ζ , ξ 无关, δ 与 ζ , η , ε 无关。



3. 假定可测变量与潜变量完全相等

如果外生可测变量与潜变量完全相等，并且无测量误差，即假定

$$\Lambda_x = I_q, \Theta_\delta = 0$$

则有

$$\begin{aligned}\eta &= B\eta + \Gamma\xi + \zeta \\ Y &= \Lambda_y\eta + \varepsilon \\ X &= \xi\end{aligned}\tag{3.8}$$

式 (3.8) 也被称为 MIMIC 模型。

由于 X 与 ξ 完全相等，式 (3.8) 也可以不用 X 变量的表述式，写为：

$$\begin{aligned}\eta &= B\eta + \Gamma X + \zeta \\ Y &= \Lambda_y\eta + \varepsilon\end{aligned}$$

三、潜变量之间关系假定

潜变量之间可以是单向箭头的关系，也可以有反馈的关系，还有可能存在相关关系。当潜变量个数多，而且不同因子之间存在相关性，模型较为复杂，可以增加一个潜变量，将模型变为二阶因子分析模型，即有

$$\begin{aligned}\eta &= B\eta + \Gamma\xi + \zeta \\ Y &= \Lambda_y\eta + \varepsilon\end{aligned}\tag{3.9}$$

式中，没有可测变量 X ，潜变量 ξ 用以建立起不同因子 η 之间的联系。

[例 3.6] 研究中学生语文、数学、英语、历史和地理的学习能力。^①

分析：语文等五门课程的学习能力分别为潜变量 $\eta_1 \sim \eta_5$ ，以 25 个问题分别测量这些课程的学习能力，即每个潜变量有 5 个可测变量，分别记为 $y_1 \sim y_{25}$ ，可以建立如图 3—4 所示的模型。

由图 3—4 可以看出，不同因子之间相关，模型较为复杂，若引进潜变量 ξ_1 反映学习能力，建立其与 5 个因子之间的关系，则模型可以简化为如图 3—5 所示的二阶因子分析模型。可以看出，将一阶因子模型变为二阶因子模型，潜变量之间关系变得更为清晰，模型形式更为简洁。

^① 侯杰泰、温忠麟、成子娟：《结构方程模型及其应用》，79 页，北京，教育科学出版社，2004。

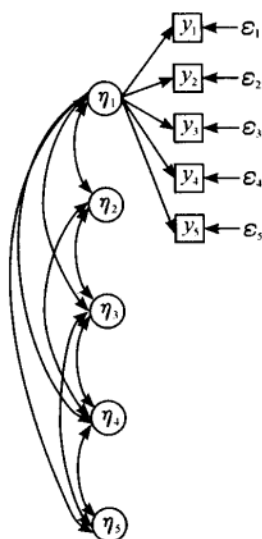


图 3—4 一阶因子模型示意图

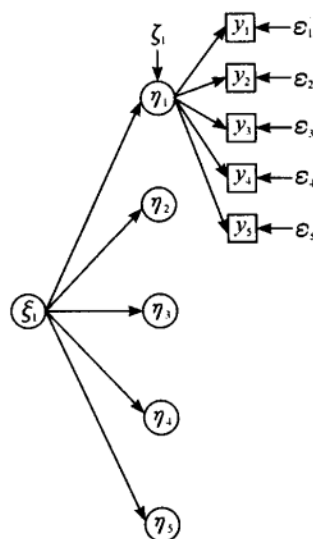


图 3—5 二阶因子分析模型示意图

四、随机干扰项的假定

可测变量若带有测量误差，结构模型中存在随机干扰项。这时，根据经验或相关理论，可以假定随机干扰项之间相关，也可以假定随机干扰项之间不相关。若随机干扰项间相关，则模型中的矩阵 Ψ 不是对角阵；若随机干扰项间不相关，则 Ψ 为对角阵。

〔例 3.7〕 考察工人观点一致性的影响因素。^①

分析：被访问者工人的基本情况以 x_1 表示资历即厂龄， x_2 表示年龄；其观点以 η_1 表示尊重，用 y_1 测量对管理者尊重程度；以 η_2 表示行动，用 y_2 测量对工作的支持程度；以 η_3 表示观点一致性，用 y_3 测量观点或意见的一致程度。由于每个内生潜变量均只用一个指标测量，其系数为 1，但每个可测变量都无法完全反映潜变量，故存在测量误差，结构模型中每一个内生潜变量也都无法得到准确反映，模型有随机干扰项 ζ 。可以建立模型如图 3—6 所示。

根据图 3—6，可以写出方程，如式 (3.10)。

^① Kenneth A. Bollen: *Structural Equations with Latent Variables*, John Wiley & Sons, 1989, p. 82.

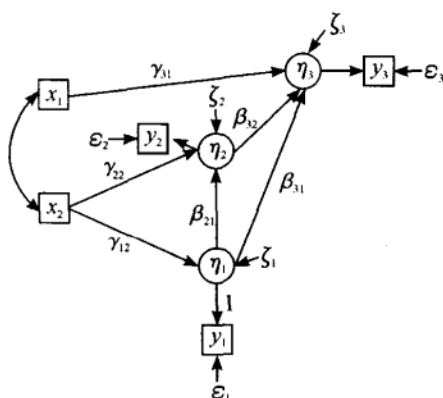


图 3—6 观点一致模型路径图

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ 0 & \gamma_{22} \\ \gamma_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

根据路径图可以看出， ζ 之间不相关，故 Ψ 为对角阵，即矩阵 Ψ 只在主对角线上有元素，为各误差项自身的方差。 B 为下三角阵。

[例 3.8] 主客观社会地位评价。^①

分析：考察主客观社会地位评价因素之间关系。以 x_1 表示个人实际收入， x_2 表示实际职业声望；以 η_1 表示个人收入评价， y_1 测量主观对收入的评价；以 η_2 表示个人职业声望， y_2 测量主观对职业声望的评价；以 η_3 表示个人社会地位， y_3 测量主观对个人总体社会地位的评价。与上例相同，每个内生潜变量均只用一个指标测量，系数设定为1； y_1 ， y_2 带有测量误差。结构模型带有随机干扰项。画出路径图如图 3—7 所示，可以写出如式 (3.11) 的方程。

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

^① Kenneth A. Bollen; *Structural Equations with Latent Variables*. John Wiley & Sons, 1989. p. 84.

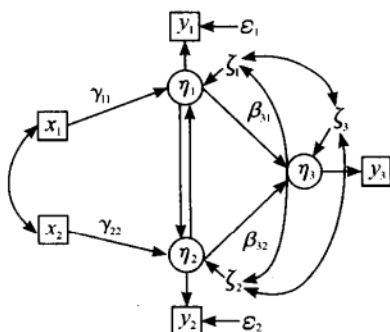


图 3—7 社会地位评价模型路径图

由图 3—7 和式 (3.11) 可以看出, B 不为下三角阵, 干扰项 ζ 之间相关, 所以 Ψ 不是对角阵。矩阵中除各误差项的方差, 还有不同误差项之间的协方差, 即

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & & \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{bmatrix}$$

五、模型隐含的协方差阵

按照 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 的形式, 全模型隐含的协方差矩阵为:

$$\begin{aligned} \Sigma_{YY}(\theta) &= E(YY') = E[(\Lambda\eta + \varepsilon)(\eta'\Lambda' + \varepsilon')] \\ &= \Lambda E(\eta\eta')\Lambda' + \Theta_\varepsilon \end{aligned}$$

由 $\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta$, 可得 $\eta = (I - B)^{-1}(\Gamma\xi + \zeta)$, 代入上式得

$$\Sigma_{YY}(\theta) = \Lambda_y (I - B)^{-1} (\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi) [(I - B)^{-1}]' \Lambda_y' + \Theta_\varepsilon \quad (3.12)$$

同样的方式可得

$$\Sigma_{YX}(\theta) = E(YX') = \Lambda_y E(\eta\xi') \Lambda_x' = \Lambda_y (I - B)^{-1} \Gamma\Phi\Lambda_x' \quad (3.13)$$

$$\Sigma_{XX}(\theta) = \Lambda_x \Phi \Lambda_x' + \Theta_\xi \quad (3.14)$$

$$\Sigma_{XY}(\theta) = \Lambda_x \Phi \Gamma' [(I - B)^{-1}]' \Lambda_y' \quad (3.15)$$

由于

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \Sigma_{YY}(\theta) & \Sigma_{YX}(\theta) \\ \Sigma_{XY}(\theta) & \Sigma_{XX}(\theta) \end{bmatrix}$$



所以

$$\begin{aligned} \Sigma(\theta) &= \begin{bmatrix} \Lambda_y(I-B)^{-1}(\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi)[(I-B)^{-1}]'\Lambda_y' + \Theta_\epsilon\Lambda_y(I-B)^{-1}\Gamma\Phi\Lambda_x' \\ \Lambda_x\Phi\Gamma'[(I-B)^{-1}]'\Lambda_y' & \Lambda_x\Phi\Lambda_x' + \Theta_\delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

若 $\Theta_\epsilon = 0$, $\Theta_\delta = 0$, $\Lambda_y = I_p$, $\Lambda_x = I_q$, 则式 (3.17) 就是式 (3.16) 可测变量无测量误差的形式。

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} (I-B)^{-1}(\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi)(I-B)^{-1}' & (I-B)^{-1}\Gamma\Phi \\ \Phi\Gamma'(I-B)^{-1}' & \Phi \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

若 $B=0$, $\Gamma=0$, $\Theta_\epsilon=0$, $\Lambda_y=0$, $\Psi=0$, 式 (3.16) 的 $\Sigma(\theta)$ 就同式 (3.18)。因为 $B=0$, $\Theta_\epsilon=0$, 则 $\Sigma_{YY}(\theta)=0$; 因为 $B=0$, $\Gamma=0$, 则 $\Sigma_{YX}(\theta)=0$, $\Sigma_{XY}(\theta)=0$, 而 $\Sigma_{XX}(\theta)=\Lambda_x\Phi\Lambda_x' + \Theta_\delta \neq 0$ 。

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_x\Phi\Lambda_x' + \Theta_\delta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

第三节 模型识别

结构方程模型的识别, 是判定模型中每一个待估计的参数 (自由参数) 是否能由观测数据求出唯一的估计值。如果方程中的自由参数有一个不能由观测数据估计得到, 则方程不可识别; 如果都能得到, 则可以识别。可以识别包括, 恰好识别和过度识别。

一、基本思路

结构方程模型的识别, 可以利用 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 中各相应元素相等进行判定。 θ 的元素可以表示为协方差 Σ 的函数, 若 θ 的各个元素能够估计, 即每一个方程的每一个参数都恰好可以由观测变量方差—协方差阵的一个或多个元素的函数表示, 则方程恰好识别; 若方程中一个参数可以由一个以上函数表示, 这意味着观测变量的方差—协方差阵对于估计参数含有过多的信息, 则方程过度识别; 如果方程中有一个参数无法用观测变量方差—协方差阵的一



个或多个元素的函数表示, 即无法得到估计值, 则方程不可识别。

[例 3.9] 若有如图 3—8 的模型, 根据 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 判定模型是否可识别。

分析: 根据图 3—8, 有

$$[\eta_1] = [\gamma_{11}][\xi_1] + [\zeta_1]$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} [\eta_1] + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} [\xi_1] + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

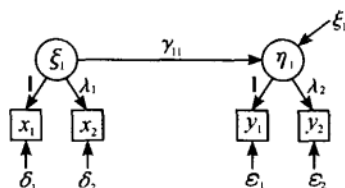


图 3—8 理论模型路径图

总体协方差阵如式 (3.19)。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{Var}(y_1) & \text{Cov}(y_2, y_1) & \text{Cov}(x_1, y_1) & \text{Cov}(x_2, y_1) \\ \text{Var}(y_2) & \text{Cov}(x_1, y_2) & \text{Cov}(x_2, y_2) & \text{Cov}(x_2, x_1) \\ \text{Var}(x_1) & \text{Cov}(x_2, x_1) & \text{Var}(x_2) & \text{Cov}(x_2, x_1) \\ \text{Cov}(x_2, y_1) & \text{Cov}(x_2, y_2) & \text{Cov}(x_2, x_1) & \text{Var}(x_2) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$\Sigma(\theta)$ 的表达式如式 (3.20)。

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^2 \phi_{11} + \psi_{11} + \text{Var}(\epsilon_1) & \lambda_2 (\gamma_{11}^2 \phi_{11} + \psi_{11}) & \lambda_2^2 (\gamma_{11}^2 \phi_{11} + \psi_{11}) + \text{Var}(\epsilon_2) & \gamma_{11} \phi_{11} & \lambda_2 \gamma_{11} \phi_{11} & \phi_{11} + \text{Var}(\delta_1) \\ \lambda_2 (\gamma_{11}^2 \phi_{11} + \psi_{11}) & \lambda_2^2 (\gamma_{11}^2 \phi_{11} + \psi_{11}) + \text{Var}(\epsilon_2) & \gamma_{11} \phi_{11} & \lambda_2 \gamma_{11} \phi_{11} & \phi_{11} + \text{Var}(\delta_1) & \lambda_1 \gamma_{11} \phi_{11} \\ \gamma_{11} \phi_{11} & \lambda_2 \gamma_{11} \phi_{11} & \phi_{11} + \text{Var}(\delta_1) & \lambda_1 \gamma_{11} \phi_{11} & \lambda_1^2 \phi_{11} + \text{Var}(\delta_2) & \lambda_1 \phi_{11} \\ \lambda_1 \gamma_{11} \phi_{11} & \lambda_1^2 \phi_{11} + \text{Var}(\delta_2) & \lambda_1 \phi_{11} & \lambda_1^2 \phi_{11} + \text{Var}(\delta_2) & \lambda_1 \phi_{11} & \lambda_1^2 \phi_{11} + \text{Var}(\delta_2) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

待估计的参数

$$\theta' = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \gamma_{11} \quad \phi_{11} \quad \text{Var}(\epsilon_1) \quad \text{Var}(\epsilon_2) \quad \text{Var}(\delta_1) \quad \text{Var}(\delta_2) \quad \psi_{11}]$$

如果 θ 中各元素都可以表示为用观测值计算的样本方差—协方差阵 S 中的函数, 则参数可求解, 模型可识别。

例如, 由

$$\text{Cov}(x_2, y_1) = \lambda_1 \gamma_{11} \phi_{11}$$

$$\text{Cov}(x_2, x_1) = \lambda_1 \phi_{11}$$

可以得到



$$\gamma_{11} = \frac{\text{Cov}(x_2, y_1)}{\text{Cov}(x_2, x_1)}$$

其中, $\text{Cov}(x_2, x_1) \neq 0$, 由于 $\text{Cov}(x_2, y_1)$ 和 $\text{Cov}(x_2, x_1)$ 可以利用 x_1 , x_2 , y_1 的观测值计算得到, 因而 γ_{11} 可以求出。

类似地, 由

$$\text{Cov}(x_2, y_1) = \lambda_1 \gamma_{11} \phi_{11}$$

$$\text{Cov}(x_1, y_1) = \gamma_{11} \phi_{11}$$

可以得到

$$\lambda_1 = \frac{\text{Cov}(x_2, y_1)}{\text{Cov}(x_1, y_1)}$$

其中 $\text{Cov}(x_1, y_1) \neq 0$, 从而求出 λ_1 。

模型识别依赖于模型参数的设定。结构方程模型的参数有三类: 自由参数 (free parameters)、固定参数 (fixed parameters) 和限制参数 (restricted parameters)。自由参数是未知并需要进行估计的参数。固定参数是不自由的并设定为固定值的参数, 如某些潜变量之间的路径系数被设定为零, 表示没有影响作用; 或将潜变量与可测变量之间的某个因子载荷设定为 1, 或将潜变量的方差设定为 1。限制参数是未知的, 但被规定为与某个或某些参数相等的参数, 如根据经验认为潜变量 1 和潜变量 3 对潜变量 2 有大体相同的影响作用, 则可以设定两个路径系数相等。在结构方程模型中, 通过固定或限制一些参数, 可以减少自由参数的个数, 这不仅可以方便参数的估计, 还可能使不可识别的模型变得可以识别。在结构方程模型设定时, 即建立假设的初始模型时, 最好通过固定或限制参数, 尽量减少自由参数, 让模型可以识别并进行估计, 通过模型检验评价和修正, 调整参数和选择最终适当的模型。

二、识别规则

(一) t 规则

t 规则识别法类似于因果模型识别中的 t 规则, 但它只能根据测量模型的参数个数进行识别。识别规则如式 (3.21)。



$$t \leq \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) \quad (3.21)$$

式中, t 是待估计的参数的个数; p 是内生可测变量的个数; q 是外生可测变量的个数。由于潜变量不可观测, 因而带有潜变量的结构方程模型, 无法采用这个规则较为准确地识别。这是一个必要而非充分条件。

[例 3.10] 对例 3.5 的模型进行识别。

分析: 根据 t 规则, 模型共有 $p+q$ 个可观测变量 (指标), 可以产生 $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$ 个不同的方差或协方差。如果设定的理论测量模型合适, 则由 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 可以得到 $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$ 个不同的方程。记 t 为模型中待估计参数个数, 模型可识别的一个必要条件是 $t \leq \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$ 。

在例 3.5 所设立的理论模型中, $p=8, q=3$, 则 $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) = 66$; 而 $t=27$, 小于 66, 根据 t 规则, 模型是可能识别的。

(二) 两步规则

两步规则 (two-step rule) 是一个识别的充分而非必要条件。第一步, 潜变量与可测变量间是否可识别, 即测量模型识别; 第二步, 判断潜变量与潜变量间是否可识别, 即结构模型识别。

1. 测量模型识别

将内生、外生变量合在一起, 所有可测变量 (指标) 都记作 X 变量, 所有潜变量 (因子) 都记作 ξ 变量, 有

$$X = \Lambda_x \xi + \delta \quad (3.22)$$

对于式 (3.22) 的识别, 可以按两指标规则、三指标规则、多指标规则识别。

(1) 三指标规则。对于多个因子的模型, 可识别的充分条件是:

- 1) 每个因子至少有三个指标, 即载荷矩阵 Λ_x 的每列至少有三个非零元素;
- 2) 每个指标只测量一个潜变量, 即载荷矩阵 Λ_x 的每一行有且仅有一个非零元素;
- 3) 误差之间不相关, 即误差的协方差阵 Θ_δ 为对角阵。



(2) 两指标规则。多个因子模型可识别的充分条件：

1) 每个因子至少有两个指标，即载荷阵 Λ_x 的每一列至少有两个非零元素；

2) 每个指标只测量一个潜变量，即载荷阵 Λ_x 的每一行有且仅有一个非零元素；

3) 对每一个潜变量，至少有另一个潜变量与之相关，即潜变量的协方差阵 Φ 的每一行，对角线以外至少有一个非零元素；

4) 误差项之间不相关，即误差的协方差阵 Θ_ϵ 为对角阵。注意，模型本身可以允许误差项之间相关。

【例 3.11】 模型形式如式 (3.23)。对模型进行识别。

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + \delta_1 \\ x_2 &= \lambda_{21} \xi_1 + \delta_2 \\ x_3 &= \xi_2 + \delta_3 \\ x_4 &= \lambda_{42} \xi_2 + \delta_4 \end{aligned} \quad (3.23)$$

分析：根据式 (3.23) 观察 Σ 和 $\Sigma(\theta)$ ，有

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{Var}(x_1) & & & \\ \text{Cov}(x_2, x_1) & \text{Var}(x_2) & & \\ \text{Cov}(x_3, x_1) & \text{Cov}(x_3, x_2) & \text{Var}(x_3) & \\ \text{Cov}(x_4, x_1) & \text{Cov}(x_4, x_2) & \text{Cov}(x_4, x_3) & \text{Var}(x_4) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \phi_{11} + \text{Var}(\delta_1) & & & \\ \lambda_{21} \phi_{11} & \lambda_{21}^2 \phi_{11} + \text{Var}(\delta_2) & & \\ \phi_{21} & \lambda_{21} \phi_{21} & \phi_{22} + \text{Var}(\delta_3) & \\ \lambda_{42} \phi_{21} & \lambda_{21} \lambda_{42} \phi_{21} & \lambda_{42} \phi_{22} & \lambda_{42}^2 \phi_{22} + \text{Var}(\delta_4) \end{bmatrix}$$

由 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 可知，若 $\phi_{21} \neq 0$ ，有

$$\phi_{21} = \text{Cov}(x_3, x_1)$$

由于 x_1 和 x_3 是有观测值的变量，因而 $\text{Cov}(x_3, x_1)$ 可以计算得到，则 ϕ_{21} 能够求出。

类似地，利用 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ ，可以求出 λ_{21} ， λ_{42} ， ϕ_{32} 等。例如，由 $\text{Cov}(x_4, x_1) = \lambda_{42} \phi_{21}$ ，可以得到



$$\lambda_{42} = \frac{\text{Cov}(x_4, x_1)}{\phi_{21}} = \frac{\text{Cov}(x_4, x_1)}{\text{Cov}(x_3, x_1)}$$

由 $\text{Cov}(x_4, x_3) = \lambda_{42}\phi_{22}$, 可以得到

$$\phi_{22} = \frac{\text{Cov}(x_4, x_3)}{\lambda_{42}} = \frac{\text{Cov}(x_4, x_3)\text{Cov}(x_3, x_1)}{\text{Cov}(x_4, x_1)}$$

因此, 两个因子相关, 即 $\phi_{21} \neq 0$ 时, 模型可识别。

对于式 (3.23) 有

$$\Theta_\delta = \begin{bmatrix} \text{Var}(\delta_1) & & & \\ & \text{Var}(\delta_2) & & \\ & & \text{Var}(\delta_3) & \\ & & & \text{Var}(\delta_4) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda_{42} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

由式 (3.24) 可知, Θ_δ 为对角阵; 式 (3.25) 表明 Λ_x 中, 每个因子有两个指标, 每个指标只测量一个因子, 即 Λ_x 中每一列至少有两个非零元素, 每一行有且仅有一个非零元素; 式 (3.26) 表明, 潜变量的协方差阵 Φ 中 $\phi_{21} \neq 0$, 即两个因子相关, 因而模型可以识别。若式 (3.26) 中 $\phi_{21} = 0$, 即两个因子不相关, 则 $\Sigma(\theta)$ 为:

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \phi_{11} + \text{Var}(\delta_1) & & & \\ \lambda_{21}\phi_{11} & \lambda_{21}^2\phi_{11} + \text{Var}(\delta_2) & & \\ & & \phi_{22} + \text{Var}(\delta_3) & \\ & & \lambda_{42}\phi_{22} & \lambda_{42}^2\phi_{22} + \text{Var}(\delta_4) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$\Sigma(\theta)$ 中有 8 个需要估计的参数: λ_{21} , λ_{42} , ϕ_{11} , ϕ_{22} , $\text{Var}(\delta_1)$, $\text{Var}(\delta_2)$, $\text{Var}(\delta_3)$ 和 $\text{Var}(\delta_4)$ 。而由式 (3.27) 知, 利用 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 只能建立 6 个方



程，显然参数无法得到有效估计。因此 $\phi_{21}=0$ ，模型不可识别。

如果模型可识别，则进行第二步。如果模型不可识别，则说明两步规则不适用，不再进行第二步。

2. 结构模型识别

将潜变量之间关系视为不带有测量误差的可测变量之间的因果模型，按第二章介绍的方法识别。

若第一步和第二步判定的结果都是可识别的，则整个模型可识别。两步规则是一个充分条件，而非必要条件，即有的结构方程模型虽然不满足两步规则，但却仍是可识别的。

[例 3.12] 对图 3—9 的模型进行识别。

分析：第一步，测量模型识别。

将图 3—9 中 ξ 记作 ξ_1 ， η 记作 ξ_2 ， y_1 记作 x_3 ， y_2 记作 x_4 ，则图 3—9 可以画成图 3—10。

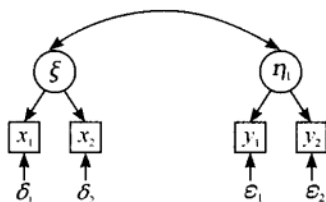


图 3—9 一个模型的路径图

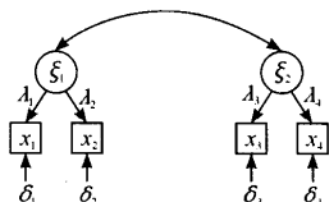


图 3—10 图 3—9 的另一种形式

由图 3—10 可知：

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & \lambda_4 & & \end{bmatrix}$$

满足 Λ_x 每列至少有两个非零元素， Λ_x 每行有且仅有一个非零元素；因为 ξ_1 与 ξ_2 相关，所以

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

满足 Φ 每一行对角线外至少有一个非零元素；由于误差之间不相关，故误差阵



$$\Theta_{\delta} = \begin{bmatrix} \text{Var}(\delta_1) & & & \\ & \text{Var}(\delta_2) & & \\ & & \text{Var}(\delta_3) & \\ & & & \text{Var}(\delta_4) \end{bmatrix}$$

满足 Θ_{δ} 是对角阵。按两指标规则，模型可识别。

第二步，结构模型识别。

考虑潜变量间关系，由于 ξ_1 与 ξ_2 之间只有相关关系，没有因果关系，因而 $B=0$ 。根据第二章的零 B 规则，模型可识别。

[例 3.13] 对例 3.5 的模型进行识别。

分析：采用两步规则。先进行测量模型识别。

将例 3.5 中的潜变量 η_1, η_2 分别记作 ξ_2, ξ_3 ； $y_1 \sim y_8$ 分别记作 $x_4 \sim x_{11}$ ；则 Λ_X 可以写成

$$\Lambda_X = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & \lambda_7 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 \\ 0 & 0 & \lambda_9 \\ 0 & 0 & \lambda_{10} \\ 0 & 0 & \lambda_{11} \end{bmatrix}$$

按照三指标规则，每个因子至少有三个指标，即 Λ_X 中每列至少有三个非零元素；每个指标只测量一个因子，即 Λ_X 中每一行有且仅有一个非零元素；但是，由于 $x_4 \sim x_{11}$ 的误差项之间相关，如图 3—3 所示， x_4 与 x_8 ， x_5 与 x_9 ， x_6 与 x_{10} ， x_7 与 x_{11} 的残差项相关，因而不满足三指标规则的第三条。模型无法用三指标规则识别。

由于第一步无法做出判断，第二步不再进行。

两步规则是充分但不是必要条件。



3. MIMIC 规则

这一规则针对 MIMIC 模型 (multiple indicators and multiple causes)。MIMIC 是一类常用的特殊模型，即多指标多原因模型，也是零 B 模型。模型特点为：外生变量都是可测变量，但有内生潜变量，可以不止一个。

讨论如下情况：路径图如图 3—11，模型如式 (3.28)，内生潜变量只有一个。

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \Gamma\xi + \zeta_1 \\ Y &= \Lambda_y\eta_1 + \varepsilon \\ X &= \xi\end{aligned}\quad (3.28)$$

由图可以看出，唯一内生潜变量 η_1 由多个指标测量，并且受多个 X 变量的影响。

这是一种特殊情况， $m=1$ 为内生潜变量数目； $n=q$ 即外生潜变量数目就是外生可测变量数目； $\Lambda_x = I_q$ 。

第一步，测量模型识别。这一步即考虑模型

$$\begin{aligned}Y &= \Lambda_y\eta_1 + \varepsilon \\ X &= \xi\end{aligned}$$

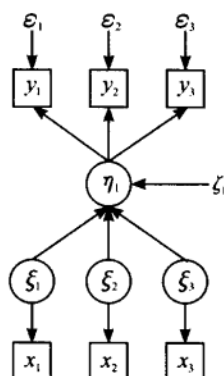


图 3—11 一个 MIMIC 模型路径图

的识别。不失一般性，假设 y_1 是 η_1 的尺度指标，即有 $y_1 = \eta_1 + \varepsilon_1$ ，任取 η_1 的另一个指标 y_i ，有 $y_i = \lambda_i\eta_1 + \varepsilon_i$ ；任取 x 的指标 x_K 。这种情况为 $p=2$ ， $q=1$ 的情况，总体协方差阵 Σ 为：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{Var}(y_1) & & \\ \text{Cov}(y_i, y_1) & \text{Var}(y_i) & \\ \text{Cov}(x_K, y_1) & \text{Cov}(x_K, y_i) & \text{Var}(x_K) \end{bmatrix}$$

模型的协方差阵 $\Sigma(\theta)$ 为：

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \text{Var}(\eta_1) + \text{Var}(\varepsilon_1) & & \\ \lambda_i \text{Var}(\eta_1) & \lambda_i^2 \text{Var}(\eta_1) + \text{Var}(\varepsilon_i) & \\ \text{Cov}(\xi_k, \eta_1) & \lambda_i \text{Cov}(\xi_k, \eta_1) & \text{Var}(\xi_k) \end{bmatrix}$$



$\Sigma(\theta)$ 中待估计参数有 6 个: λ_i , $\text{Var}(\eta_1)$, $\text{Cov}(\xi_k, \eta_1)$, $\text{Var}(\xi_k)$, $\text{Var}(\epsilon_1)$ 和 $\text{Var}(\epsilon_i)$ 。由 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 可以构造 6 个方程, 参数的个数等于方程的个数, 所有参数都可以求出。因而, $p=2$, $q=1$ 时, 模型可识别。类似地可以证明, $p>2$, $q>1$ 时, 未知参数也可以求解, 模型可识别。

第二步, 结构方程识别。由于结构方程 $\eta_1 = \Gamma\xi + \zeta_1$ 中的 $B=0$, 按照因果模型的零 B 规则, 模型可识别。

这表明, 对于只有一个内生潜变量的 MIMIC 模型, 模型可识别的充分条件是 $p \geq 2$, $q \geq 1$ 。

这是充分而非必要条件, 如果 $p=1=q$, 则模型为回归模型, 可识别。

以上三种规则是对整体模型进行识别。还有一些模型局部判别的方法, 如第二章因果模型识别的阶条件、秩条件, 结构方程模型的识别也可以利用。





模型参数估计

第一节 参数估计的基本思路

一、参数的类型

结构方程模型的参数与许多统计模型一样，也可以分为三类：自由参数（free parameters）、固定参数（fixed parameters）和限制参数（restricted parameters）。

自由参数是未知并需要估计的参数。模型能否被识别取决于自由参数的个数。实际应用时，为了保证模型可识别，通常尽量减少自由参数，只保留绝对必要的参数，待模型可识别并能进行参数有效估计后，再考虑引入其他感兴趣的参数或替换某些参数。通过比较这些替换模型作出最后的选择。

固定参数是不自由的并固定于某个值的参数。例如，在测量模型中，将每个潜变量的可测变量之一的因子载荷设定为 1，或将潜变量的方差设定为 1；又如，在结构模型中，将一些路径系数设定为 0，表示设定为无影响作用。通过设定一些固定参数可以大大减少自由参数的个数。

限制参数是未知的，但可以被规定等于另一个或另一些参数的值。如例 3.9 中，可以认为 1960 年和 1965 年政治反对的自由度在政治民主这一潜变量上的因子载荷不变，则 $\lambda_5 = \lambda_9$ 。这样，自由参数的个数可以减少。

当模型不可识别时，可以通过固定或限制某些参数，使模型可以识别。这对于结构方程模型的建立很重要，在现有的软件中，通常都会在参数估计时，



给予提示。利用提示的信息，对相应参数加以调整，有助于模型的建立。

[例 4.1] 大学生工作预期结构方程模型的参数设定。

分析：利用 SEM 研究探讨影响大学生工作期望的因素时，可以考虑的潜变量有学校背景、个人能力、个人特征和家庭情况。

以 $\eta_i (i=1, 2, 3)$ 表示模型的内生潜变量，分别为大学生的工作期望、个人能力、个人特征； $\xi_i (i=1, 2)$ 表示模型的外生潜变量，分别为大学生的学校背景和家庭情况。 $y_i (i=1, 2, 3)$ 分别代表理想月薪、预期月薪、个人就业难易程度评价，测量大学生的工作期望； $y_i (i=4, 5, 6, 7)$ 分别代表综合平均学分 (GPA)、英语综合能力、计算机水平、交往能力，测量个人能力； $y_i (i=8, 9, 10, 11)$ 分别代表性格是否开朗、亲和力、进取心、韧性的自我评价，测量个人特征； $x_i (i=1, 2, 3)$ 分别代表未来两年内对我国经济形势的预期、学校在社会上的声望、专业就业前景的评价，测量学校背景；对家庭情况的测量用 $x_i (i=4, 5, 6)$ ，分别表示家庭对就业帮助程度、父母的受教育程度、家庭收入。建立结构方程模型，如图 4—1 所示。显然，根据初步设定的关系，因为存在反馈关系，模型为非递归的。非递归模型不易估计参数，可以考虑固定一些参数，如设定家庭背景与个人能力的路径系数为 0，个人特征

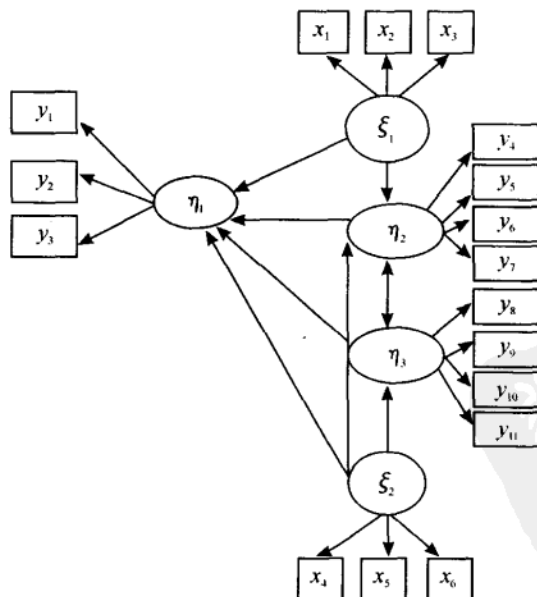


图 4—1 大学生工作预期结构方程模型



与个人能力只有单向作用，使模型可识别，再估计参数。

二、基本思路

大多数统计方法，如回归分析、方差分析、协方差分析、探索性因子分析、典型相关分析等，在进行估计时，是以实际观测值与模型估计值之间的差值最小化为目标。其最小化的是被观测与被预测的各个值差值的函数，即关于 $(Y_i - \hat{Y}_i)$ 的函数，其中 Y_i 为实际观测值， \hat{Y}_i 为相应的估计值。结构方程模型参数估计是从 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 出发。 Σ 是被观测总体的方差—协方差矩阵， $\Sigma(\theta)$ 是假设模型含有参数 θ 的方差—协方差矩阵，也就是假设模型拟合的方差—协方差矩阵，或者是由估计出的 θ 预测的方差—协方差矩阵。被观测的协方差，即样本协方差减去被预测的协方差，形成了残差。试图使该残差最小化是结构方程模型参数估计的基本思路。

例如，有下面的变量关系

$$x_1 = \xi + \delta_1$$

$$x_2 = \xi + \delta_2$$

式中， x_1 和 x_2 为随机变量； δ_1 和 δ_2 是随机干扰项，同 ξ 无关，且彼此无关； $E(\delta_1) = E(\delta_2) = 0$ 。根据 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ ，有

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(x_1) & \text{Cov}(x_1, x_2) \\ \text{Cov}(x_1, x_2) & \text{Var}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi + \text{Var}(\delta_1) & \phi \\ \phi & \phi + \text{Var}(\delta_2) \end{bmatrix}$$

这里， ϕ 是潜变量 ξ 的方差； θ 由三个要素组成： ϕ ， $\text{Var}(\delta_1)$ 和 $\text{Var}(\delta_2)$ 。等号的左边是被观测到的变量 x_1 ， x_2 的方差—协方差矩阵 Σ ，等号的右边是假设模型含有三个参数的方差—协方差矩阵 $\Sigma(\theta)$ ，可以看出， Σ 是关于待估计参数的函数。一般情况下， $\Sigma(\theta)$ 是假设模型拟合的协方差阵，是含有参数 θ 的阵，由模型

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta$$

$$Y = \Lambda_y\eta + \varepsilon$$

$$X = \Lambda_x\xi + \delta$$

可知

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \Lambda_y \text{Var}(\eta) \Lambda_y' + \Theta_\varepsilon & \Lambda_y \text{Cov}(\eta, \xi) \Lambda_x' \\ \Lambda_x \text{Cov}(\xi, \eta) \Lambda_y' & \Lambda_x \text{Var}(\xi) \Lambda_x' + \Theta_\delta \end{bmatrix}$$





隐含假设: $(I-B)^{-1}$ 存在, 即 $(I-B)$ 可逆。

其中,

$$\begin{aligned}\text{Var}(\eta) &= (I-B)^{-1} \text{Var}(\Gamma\xi + \zeta)(I-B)^{-1'} \\ &= (I-B)^{-1} (\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi)(I-B)^{-1'}\end{aligned}$$

$$\text{Var}(\xi) = \Phi$$

$$\text{Cov}(\eta, \xi) = (I-B)^{-1} \Gamma\Phi$$

若记 $\tilde{B} = (I-B)^{-1}$

则

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \Lambda_y \tilde{B} (\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi) \tilde{B}' \Lambda_y' + \Theta_\epsilon & \Lambda_y \tilde{B} \Gamma\Phi\Lambda_x' \\ \Lambda_x \Phi\Gamma' \tilde{B}' \Lambda_y' & \Lambda_x \Phi\Lambda_x' + \Theta_\delta \end{bmatrix}$$

若理论模型为真, 则 $\Sigma(\theta) = \Sigma$, 从而可测变量的方差和协方差是模型参数的函数。

结构方程模型参数估计的基本方法是从 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 出发。其中, Σ 是观测变量之间的总体协方差阵; $\Sigma(\theta)$ 是假设模型 (带有参数) 的协方差阵, 即模型拟合的协方差阵或说由模型推出的协方差阵。以样本协方差阵替代总体协方差阵, 即有

$$\hat{\Sigma} = S$$

其中, S 为全部可测变量组成的 $(p+q) \times 1$ 向量的样本协方差阵, 以 S 无限接近 $\Sigma(\theta)$, 使得由假设模型得出的协方差阵 $\Sigma(\theta)$ 与 S 尽可能“接近”。如果模型定义正确, 总体协方差阵与模型拟合协方差阵应该相等。接近程度可以用拟合函数 (fit function) 表示, 记为 $F(S, \Sigma(\theta))$ 。不同的估计方法, 选用的拟合函数不同, 得到的结果也不完全一样。

第二节 参数估计的常用方法

一、最大似然估计

1. 拟合函数

$$F_{ML} = \log |\Sigma(\theta)| + \text{tr}[\Sigma^{-1}(\theta)S] - \log |S| - (p+q) \quad (4.1)$$

式中, $\text{tr}[\Sigma^{-1}(\theta)S]$ 是矩阵 $[\Sigma^{-1}(\theta)S]$ 的迹, 即矩阵的对角线元素之和;



$\log |\Sigma(\theta)|$ 表示矩阵 $\Sigma(\theta)$ 的行列式的对数； $\log |S|$ 表示矩阵 S 的行列式的对数； p, q 分别是内生、外生可测变量数目。

在大样本情况下，若 S 与 $\Sigma(\theta)$ 越接近，即 $\log |\Sigma(\theta)|$ 与 $\log |S|$ 越接近， $\text{tr}[\Sigma^{-1}(\theta)]$ 越接近于 $p+q$ ，则 F_{ML} 越小。若 $S=\Sigma(\theta)$ ，则 $F_{ML}=0$ 。因为这时， $\log |\Sigma(\theta)| = \log |S|$ ， $\text{tr}[\Sigma^{-1}(\theta)] = \text{tr}(I) = p+q$ 。使得 F_{ML} 达到最小值的估计 $\hat{\theta}$ 称为 θ 的最大似然值估计 (maximum likelihood, ML)。

2. 一般假定

- (1) $S, \Sigma(\theta)$ 是正定阵，即行列式值大于零；
- (2) $\Sigma(\theta)$ 有逆矩阵；若 $\Sigma^{-1}(\theta)$ 不存在，则无法求解；
- (3) 可测变量服从正态分布。

采用最大似然估计要求可测变量为连续变量且服从多元正态分布。偏态分布会导致估计效果很差以及错误的标准误差和偏高的值。有研究认为，当可测变量虽不服从正态分布，但峰度不大于 8（正态分布峰度为 3）时，用 ML 估计不会有很大影响，也有研究认为，峰度不大于 25 也可以。如果数据不服从多元正态分布，可以考虑采取以下办法：变量进行变换，使其近似于多元正态分布；删除异常值；用自助 (bootstrap) 再抽样，估计参数估计的方差；采用其他估计方法，如样本足够大，峰度很高大，可以采用 WLS，其允许变量的偏态性且有渐近有效的估计。

3. 性质

(1) ML 估计是渐近无偏估计。这一性质表明，参数均值依概率收敛于总体均值，即 $E(\hat{\theta})$ 依概率收敛于 $E(\theta)$ 。

若参数 θ 的估计量 $T(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 对一切 n 及 $\theta \in \Omega$ ，有

$$E_{\theta}[T(\xi_1, \dots, \xi_n)] = \theta$$

则称 $T(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 为参数 θ 的无偏估计量。记 $E_{\theta}(T) - \theta = b_n$ ，这里 b_n 为偏差。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ，则称 T 为 θ 的渐近无偏估计量。ML 估计在大样本情况下偏差很小；样本越大，偏差越小。一般在参数估计时至少需要 200 个样本。

(2) ML 估计是一致估计。对于任意给定的 $\epsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p\{|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon\} = 0$$

则 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ 。



或有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p\{|\hat{\theta} - \theta| \leq \epsilon\} = 1$$

表明在大样本情况下, $\hat{\theta}$ 与 θ 有显著偏差的可能性极小。这种情况下, $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计。

(3) ML 是有效估计。如果说, 无偏估计是考察估计时均值的大小, 那么有效估计则是考虑估计时方差的大小。对于未知参数 θ , 会有许多不同的无偏估计量, 其中方差达到下界的无偏估计量称为有效估计量。

ML 估计是渐近有效的, 即所有可能的无偏估计量中, ML 估计的渐近方差最小。

(4) ML 估计值渐近服从正态分布。在大样本情况下 ($n > 200$), ML 估计的分布近似于正态分布。在这一基础上, 参数估计值与其标准差之比, 近似服从正态分布, 甚至为标准正态分布, 因而可以对参数进行显著性检验。

(5) ML 估计不受量纲影响。一般情况下, ML 估计不受测量单位的影响, 亦称具有尺度不变性, 即当一个或多个指标的测量单位发生变化时, 参数的 ML 估计值不变。具有这一性质, 基于协方差阵得到的估计与基于相关系数阵得到的估计是一样的。

二、未加权最小二乘估计

1. 拟合函数

$$F_{\text{ULS}} = \frac{1}{2} \text{tr}[(S - \Sigma(\theta))^2] \quad (4.2)$$

式中, $S - \Sigma(\theta)$ 为残差阵。

使 F_{ULS} 达到最小的估计 $\hat{\theta}$ 称为未加权最小二乘估计 (unweighted least squares, ULS)。可以看出, ULS 的基本思想是使 S 与 $\Sigma(\theta)$ 差距最小。这有点类似普通最小二乘估计。普通最小二乘估计是考虑 $e = Y - \hat{Y}$, 即观测值与模型估计值的差值达到最小, 有 $\Sigma e^2 = \min$; 而 ULS 是考虑 $S - \Sigma(\theta)$, 即 $\text{tr}[S - \Sigma(\theta)]^2 = \min$, 也就是试图使 $\Sigma(\theta)$ 中的每个元素与 S 中对应的元素差距最小。ULS 定义的距离是两个矩阵所对应元素之差的平方和, ULS 与 OLS 定义的差距即距离不同。



2. 性质

- (1) ULS 估计是一致估计，在大样本情况下。
- (2) 对可测变量的分布不作限定，即不要求可测变量总体服从正态分布。
- (3) ULS 估计并非总体真值的渐近有效估计。
- (4) ULS 估计不具有量纲不变性，即没有尺度不变性。根据协方差阵得到的估计与根据相关系数阵得到的估计一般是不同的。
- (5) 不能进行参数显著性检验。由于对可测变量分布不作限定，因而一般情况下，得不到参数估计时的标准误差，无法进行参数的显著性检验。若可测变量服从正态分布，可以对参数作显著性检验，有的软件给出 ULS 估计的误差，是假定服从正态分布下的渐近标准误差，如 LISREL 给出正态理论下参数估计的标准误差。

三、广义最小二乘估计

1. 拟合函数

$$F_{\text{GLS}} = \frac{1}{2} \text{tr}(\{[\mathbf{S} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})] \mathbf{W}^{-1}\}^2) \quad (4.3)$$

其中，各符号的含义同前。 \mathbf{W} 是一个加权矩阵，是一个正定阵或依概率收敛于一个正定阵的随机矩阵。使 F_{GLS} 达到最小的估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ，称为广义最小二乘估计 (generalized least squares, GLS)。

观察式 (4.2) 与式 (4.3) 可知，ULS 是 GLS 的特例，即 $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ ，也就是 \mathbf{W} 取单位阵时的估计。如果 $\mathbf{W}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ ，则 GLS 的估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GLS}}$ 就是 ML 的估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ML}}$ ，ML 估计也是 GLS 估计的特例。

2. \mathbf{W}^{-1} 的选取

根据 GLS 的假定， \mathbf{W}^{-1} 可以取常数正定矩阵，也可以取以概率收敛的正定矩阵，即所取的 \mathbf{W}^{-1} 本身随机，但以概率收敛于一个正定矩阵。实际应用中，通常取 $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}$ ，其中 \mathbf{S}^{-1} 为样本协方差阵。

这时

$$\begin{aligned} F_{\text{GLS}} &= \frac{1}{2} \text{tr}(\{[\mathbf{S} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})] \mathbf{S}^{-1}\}^2) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}\{[\mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S}^{-1}]^2\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

结构方程模型软件通常采用 $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}$ ，即 GLS 是以 \mathbf{S}^{-1} 为加权矩阵



的 GLS。

3. 性质

若样本协方差阵 S 满足下列条件，一是 $E(S_{ij}) = \sigma_{ij}$ ，即 $S = (S_{ij})$ ，是 $\Sigma = (\sigma_{ij})$ 的无偏估计；二是可测变量服从多元正态分布，则在大样本下，GLS 估计具有以下性质：

(1) GLS 估计是一致估计，且渐近有效。有效性取决于加权矩阵 W^{-1} 的限制条件，若加权矩阵 W^{-1} 依概率收敛于 Σ^{-1} ，GLS 估计与 ML 估计一样，具有渐近有效性；GLS 估计渐近服从正态分布。

(2) $(N-1)F_{GLS}$ 近似于 χ^2 分布。在大样本情况下 $(N-1)F_{GLS}$ 与 $(N-1)F_{ML}$ 一样，近似于 χ^2 分布，即有

$$(N-1)F_{GLS} \sim \chi^2 \left(\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)-t \right)$$

式中， N 为样本量； p, q 分别是内生、外生观测变量数目； t 是模型待估计参数的个数，即自由参数的个数。 F_{GLS} 与 F_{ML} 一样，可用来对模型进行拟合程度的检验。

(3) 大样本情况下， F_{GLS} 与 F_{ML} 很接近，估计的结果也很接近。

(4) 具有尺度不变性。

当可测变量的测量单位发生变化时，不会影响参数的 GLS 估计结果，即具有量纲不变性。

4. 三种估计方法的评价

可以利用可决系数对不同估计方法得到的估计结果进行评价。可决系数的公式如式 (4.5)。

$$R^2 = 1 - \frac{|\hat{\Psi}|}{|\hat{\Sigma}_{YY}|} \quad (4.5)$$

式中， Ψ 是残差的协方差阵，如果 $\hat{\Psi}$ 趋近于 0，则 R^2 趋近于 1，表明估计结果与实际数据越接近。

对于每一个 y_i ，都可以计算一个可决系数，如式 (4.6)。

$$R^2_{y_i} = 1 - \frac{\hat{\Psi}_{ij}}{\hat{\sigma}_{y_i}^2} \quad (4.6)$$



同 R^2 一样, $R^2_{y_i}$ 也是越接近于 1, 估计结果越好。

[例 4.2] 估计例 3.5 的模型。

分析: 例 3.5 的理论模型如图 3—3 所示, 模型形式如式 (3.2a) 或式 (3.2b)。如果每个观测变量获得 75 个数据, 即 $N=75$, 由观测值计算得到的 x_1, x_2 和 x_3 以及 $y_1 \sim y_8$ 的协方差阵如表 4—1。

表 4—1 协方差阵

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	x_1	x_2	x_3
y_1	6.89										
y_2	6.25	15.58									
y_3	5.84	5.84	10.76								
y_4	6.09	9.51	6.69	11.22							
y_5	5.06	5.60	4.94	5.70	6.83						
y_6	5.75	9.39	4.73	7.44	4.98	11.38					
y_7	5.81	7.54	7.01	7.49	5.82	6.75	10.80				
y_8	5.67	7.76	5.64	8.01	5.34	8.25	7.59	10.53			
x_1	0.73	0.62	0.79	1.15	1.08	0.85	0.94	1.10	0.54		
x_2	1.27	1.49	1.55	2.24	2.06	1.81	2.00	2.23	0.99	2.28	
x_3	0.91	1.17	1.04	1.84	1.58	1.57	1.63	1.69	0.82	1.81	1.98

资料来源: Kenneth A. Bollen: *Structural Equations with Latent Variables*, 1989, p. 334.

结构方程模型在参数估计前进行模型设定时, 通常将有些参数固定或加以限制, 以减少自由参数的个数。在该例中, 考虑将有些参数固定为 1, 即 $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_8 = 1$, 这样, 其他参数的估计值, 将可以以其为基准加以解释说明; 同时, 还可以对某些参数加以限制, 如认为 1960 年和 1965 年政治反对的自由程度、选择的公正性以及被选举的立法机关的有效性, 在政治民主这一潜变量上的因子载荷不变, 即有: $\lambda_5 = \lambda_9$, $\lambda_6 = \lambda_{10}$, $\lambda_7 = \lambda_{11}$, 则模型式 (3.2b) 中的 Λ_x, Λ_y 分别为:

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$



$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_5 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \\ \lambda_7 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda_5 \\ 0 & \lambda_6 \\ 0 & \lambda_7 \end{bmatrix}$$

分别采用最大似然估计 (ML)、未加权最小二乘估计 (ULS) 和广义最小二乘估计 (GLS) 估计参数, 结果如表 4—2。表中括号内数值为估计该参数时的近似标准误差。

表 4—2 ML, GLS, ULS 估计结果

参数	GLS	ML	ULS
λ_1	1.00 (—)	1.00 (—)	1.00
λ_2	2.24 (0.16)	2.18 (0.14)	2.06
λ_3	1.89 (0.18)	1.82 (0.15)	1.62
λ_4	1.00 (—)	1.00 (—)	1.00
λ_5	1.18 (0.15)	1.19 (0.14)	1.21
λ_6	1.22 (0.12)	1.18 (0.12)	1.14
λ_7	1.23 (0.13)	1.25 (0.12)	1.29
γ_{11}	1.81 (0.45)	1.47 (0.40)	1.32
γ_{21}	0.72 (0.28)	0.60 (0.23)	0.41
β_{21}	0.80 (0.08)	0.87 (0.08)	0.92
$\text{Var}(\delta_1)$	0.05 (0.02)	0.08 (0.02)	0.02
$\text{Var}(\delta_2)$	0.15 (0.07)	0.12 (0.07)	0.07
$\text{Var}(\delta_3)$	0.40 (0.09)	0.47 (0.09)	0.60



可以看出，三种估计方法的估计结果有差异。哪种估计结果更可以接受，需要通过模型检验和评价再决定。

四、其他估计方法

1. 一般加权最小二乘估计 (weighted least squares, WLS)

拟合函数为：

$$F_{WLS} = (S - \sigma^*)' V^{-1} (S - \sigma^*) \quad (4.7)$$

式中， $S = (S_{11} \ S_{21} \ S_{22} \ S_{31} \ \cdots \ S_{KK})'$ ，是 $S = (S_{ij})$ 的下三角阵元素按列顺序排列的向量，有 $\frac{k(k+1)}{2}$ 维， $k = p + q$ ； $\sigma^* = (\sigma_{11}^* \ \sigma_{21}^* \ \sigma_{22}^* \ \cdots \ \sigma_{31}^* \ \cdots \ \sigma_{KK}^*)'$ ，是 $\Sigma(\theta) = (\sigma_{ij}^*)$ 的下三角阵元素按列顺序排列的向量； V 是一个用于加权的 $\frac{k(k+1)}{2}$ 阶正定矩阵。

使拟合函数 F_{WLS} 达到最小的估计 $\hat{\theta}$ 称为一般加权最小二乘估计。

2. 对角加权最小二乘估计 (diagonally weighted least squares, DWLS)

将 WLS 估计的加权矩阵 V 取为对角矩阵，则估计就是对角加权最小二乘估计。拟合函数为：

$$F_{DWLS} = \sum_{i=1}^{p+q} \sum_{j=1}^{p+q} v_{ij}^{-1} (S_{ij} - \sigma_{ij}^*)^2 \quad (4.8)$$

这是 ULS 和 WLS 之间的一个折中方法，实际中不常用。

3. 工具变量估计 (instrumental variable, IV)

(1) 问题的提出。在回归问题中，当解释变量存在测量误差时，解释变量与误差项之间相关，违背回归假设，如

$$Y = a + bX + \varepsilon$$

当 X 有测量误差时，有

$$X^* = X + V$$

则 $Y = a + b(X^* - V) + \varepsilon$

得到 $Y = a + bX^* + (\varepsilon - bV)$

由于 X 存在测量误差，因而 X^* 与残差项中 bV 有关。若误差足够小，不至于破坏估计方法的合理性，可以采用最小二乘法。但当测量误差破坏



估计方法的合理性, 则无法运用原有的估计方法。这时需要解决的是解释变量与误差项之间的相关问题。在结构方程模型中, 若可测变量存在测量误差, 同样会使得解释变量与误差项之间相关, 违背模型的基本假设, 无法运用前面的一些估计方法。也需要解决解释变量与误差项相关的问题。

(2) 基本思路。寻找一个工具, 其与解释变量 X 高度相关, 同时与误差项无关。这个工具是一个新的变量, 记作 Z 。若变量 Z 满足下列条件, 则称它为一个工具变量。

1) 样本容量增大时, Z 与模型中的误差项 ($\zeta, \varepsilon, \delta$) 之间的相关系数都趋于 0。

2) 样本容量增大时, Z 与 X 之间相关系数不为 0。

若能够找到若干工具变量, 可从中选择与 X 变量相关程度最高的。

(3) 应用。

假定: $y_1 = \gamma_{11}x_1 + \zeta_1$ ($E(\zeta_1) = 0$), 如果 ζ_1 与 x_1 相关, 则参数 γ_{11} 最小二乘估计量与 γ_{11} 不一致。引入工具变量 z_1 , 满足: $\text{Cov}(z_1, \zeta_1) = 0$, $\text{Cov}(z_1, x_1) \neq 0$ 。

由于

$$\text{Cov}(y_1, z_1) = \gamma_{11} \text{Cov}(x_1, z_1)$$

有

$$\gamma_{11} = \frac{\text{Cov}(x_1, z_1)}{\text{Cov}(y_1, z_1)}$$

可知

$$\hat{\gamma}_{11} = \frac{S_{x_1 z_1}}{S_{y_1 z_1}} \quad (4.9)$$

如果 z_1 存在, 则 γ_{11} 可求。

$\hat{\gamma}_{11}$ 的渐近方差为:

$$\left(\frac{\psi_{11}}{N}\right) \left(\frac{\text{Var}(z_1)}{[\text{Cov}(z_1, x_1)]^2}\right) \quad (4.10)$$

[例 4.3] 一个单因子模型。

$$x_1 = \xi_1 + \delta_1 \quad (4.11)$$



$$x_2 = \lambda_{21}\xi_1 + \delta_2 \quad (4.12)$$

$$x_3 = \lambda_{31}\xi_1 + \delta_3 \quad (4.13)$$

$$x_4 = \lambda_{41}\xi_1 + \delta_4 \quad (4.14)$$

其中, $\text{Cov}(\xi_1, \delta_i) = 0$, $\text{Cov}(\delta_i, \delta_j) = 0$ ($i \neq j$)。

由式 (4.11) 可知, $\xi_1 = x_1 - \delta_1$, 代入式 (4.12) 得

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda_{21}\xi_1 + \delta_2 = \lambda_{21}(x_1 - \delta_1) + \delta_2 = \lambda_{21}x_1 + (\delta_2 - \lambda_{21}\delta_1) \\ &= \lambda_{21}x_1 + u \end{aligned} \quad (4.15)$$

由于 u (u 中含有 x_1 的测量误差 δ_1) 与 x_1 相关, λ_{21} 的估计不能运用普通最小二乘法估计。

注意, 由于 $\text{Cov}(\delta_i, \delta_j) = 0$ ($i \neq j$), u 与 x_3, x_4 都不相关, 可以将 x_3, x_4 作为工具变量, 右乘到式 (4.15), 得到

$$x_2 \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \lambda_{21} x_1 \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

取期望得到

$$E(x_2 \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix}) = \lambda_{21} E(x_1 \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix}) + E(u \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix})$$

由于 u 与 x_3, x_4 均不相关, 因此 $E(u \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix})$ 为 0。 x_2 与 x_3, x_4 的协方差为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{23} & \sigma_{24} \end{bmatrix} = \lambda_{21} \begin{bmatrix} \sigma_{13} & \sigma_{14} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

将样本协方差代入, 可得 λ_{21} 的最小二乘估计为:

$$\hat{\lambda}_{21} = \left(\begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{14} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{23} \\ S_{24} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

式 (4.17) 的 $\hat{\lambda}_{21}$ 是 λ_{21} 的一致估计, 但不是有效的。

式 (4.16) 也可以采用加权最小二乘估计得到:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{21} &= \\ & \left[\begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{14} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{23} \\ S_{24} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

估计 $\lambda_{31}, \lambda_{41}$ 时, 工具变量要相应地变化。如估计 λ_{31} 时工具变量是 x_2 和 x_4 ;



Λ_x 估计后, 可求出 Φ , Θ_s 。

4. 两阶段最小二乘估计 (two-stage least squares, TSLS)

(1) 基本思想。两阶段最小二乘法是将估计过程分为两个阶段, 第一阶段创造一个工具变量; 第二阶段对引入工具变量后的方程进行估计。

(2) 应用。

[例 4.4] 对下面的模型进行估计。

$$\begin{aligned} Y &= \alpha + \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \zeta \\ x_1 &= \xi_1 + \delta_1 & x_3 &= \xi_2 + \delta_3 \\ x_2 &= \lambda_2 \xi_1 + \delta_2 & x_4 &= \lambda_4 \xi_2 + \delta_4 \end{aligned}$$

其中, 误差项之间不相关, 因子与误差项之间不相关, 欲估计参数。

分析: 由

$$\xi_1 = x_1 - \delta_1 \quad \xi_2 = x_3 - \delta_3$$

可得

$$\begin{aligned} Y &= \alpha + \gamma_1 (x_1 - \delta_1) + \gamma_2 (x_3 - \delta_3) + \zeta \\ &= \alpha + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_3 + (\zeta - \gamma_1 \delta_1 - \gamma_2 \delta_3) \end{aligned} \quad (4.19)$$

其中, γ_1, γ_2 无法用 OLS 估计, 令 $u = \zeta - \gamma_1 \delta_1 - \gamma_2 \delta_3$ 则其与 x_1, x_3 相关。可以采用两阶段最小二乘法对参数进行估计。

第一步: 以 x_2, x_4 的函数替代 x_1, x_3 , 即以 x_2, x_4 为工具变量。

作 x_1 对 x_2, x_4 的最小二乘估计值 \hat{x}_1 , 作 x_3 对 x_2, x_4 的最小二乘估计值 \hat{x}_3 。 \hat{x}_1 和 \hat{x}_3 均与式 (4.19) 中 u 无关, 但分别与 x_1 和 x_3 相关。

第二步: 分别用 \hat{x}_1, \hat{x}_3 替代式 (4.19) 中的 x_1, x_3 。作 Y 对 \hat{x}_1, \hat{x}_3 的最小二乘估计, 得到 $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ 。

这一方法可以用于过度识别模型的参数估计。其不足之处是忽略模型中其他的信息, 是有限信息估计。

五、关于收敛问题

结构方程模型的参数估计多数采用迭代的方法, 有必要讨论关于收敛的问题。一般来说, 关于参数估计时的收敛问题, 主要关注三个方面: 收敛标准、最大迭代次数和初始值。



1. 收敛标准

收敛标准是事先给定的迭代停止的标准。收敛标准不一样，参数估计结果会有差异，如 EQS 中采用的收敛标准为： $|F_{ML}(\theta_i) - F(\theta_{i+1})| < 0.001$ ，即最大似然估计时，第 i 步与第 $i+1$ 步拟合函数之差的绝对值小于事先给定的一个任意小的数，如 0.001， 10^{-4} 等。通常认为迭代过程中，前后两次结果的差异足够小，再进行迭代没有意义，可以停止。

2. 允许的最大迭代次数

允许的最大迭代次数是事先给定迭代过程终止的迭代次数。由于数据量不同，选定的算法不同，迭代过程的长短不一样，给定最大迭代次数使得迭代过程经过这么多次迭代后自动停止。

在 EQS 软件中，ML，GLS，VLS 估计方法允许最大迭代次数为 30~500 次。LISREL 6.2 中，最大迭代次数是 250 次。

3. 初始值

数值计算采用迭代方法，必须有一个开始的值，称为初始值，通常需要事先给定。在 EQS 中，初始值可以人工给定，如给定 θ_0 ，不收敛则采用 θ_E 作为新的开始；也可以借鉴前人的工作，研究某一类问题以往给出的初始值是什么，可以用来作为这次的开始。

在很多软件中，初始值是程序自动给定，这是程序设计时给出的初始值，如果不采用人工给定，可以默认程序设定的初始值。在许多计算中，用不同的初始值，收敛速度可能不一样。当对给定初始值没有把握时，通常采用软件默认的初始值，根据计算的结果再决定是否需要调整。

第三节 信度与效度

当建立结构方程模型所使用的数据是由直接调查得到的结果时，调查数据是否能说明调查的结论，需要对数据的可信程度、有效程度进行分析。本书涉及的内容要求测量数据是定距及以上测量层次的数据，定序数据如果能够转换成定距数据，可以使用。这一点，应在设计问卷时充分考虑，尽量采用合理的量表形式进行测量。现在已有一些学者研究定类数据的应用，有兴趣的读者可以参看相关文献。



一、定义

1. 效度

效度 (validity) 指测量工具能够正确测量出所要测量问题的程度。测定效度就是要确认所收集的数据能否得到所要得到的结论、反映所要讨论的问题,同时也判定潜变量是否确定得合理。

例如,有一根尺标出的量度为 36 米,而实际的量度为 40 米。虽然用它测量某物长度的结果每次都相同,但量度结果却被降低,产生偏差,表明这个测量工具即这根尺量度无效度。因为它不能真实反映所要反映的事物。

效度的正确性是相对的,通常以测验分数或相关系数表示。根据效度的定义,测量工具的效度可以从四个方面进行度量,即内容效度、标准效度、结构效度和共轭效度。

2. 信度

信度 (reliability) 指测量结果具有一致性或稳定性的程度。对于同一个人不同时间,以相同的测量工具进行测量,如果两次测量结果一致,表明测量结果具有稳定性、可靠性。一致性越高,信度越高。一致性的程度也是相对的,误差越小,信度越高。信度主要检测所收集数据的可靠性。一般来说,数据的可信程度可以从三个方面测量,即稳定性、等值性和内部一致性。

二、效度的度量

根据效度定义所涵盖的内容,效度的度量一般从几个方面分别考虑。

1. 效度度量的基本思想

传统的效度度量是基于如式 (4.20) 的思想。

$$X = T + B + E \quad (4.20)$$

式中, X 是测量结果; T 是真值; B 是系统误差; E 是随机误差。

如果不考虑系统误差,则有式 (4.21)。

$$X = T + E \quad (4.21)$$

式中, T 可以分解为 $T = T_x + T_0$; T_x 是测量欲得到的内容; T_0 是与测量目



的无关的内容。

若 $X = T = T_r$ ，则“有效”，因此，效度可以用方差的比例测量，如式 (4.22)。

$$\text{效度} = \frac{\sigma_{T_r}^2}{\sigma_X^2} = 1 - \frac{\sigma_{T_0}^2 + \sigma_E^2}{\sigma_X^2} \quad (4.22)$$

式 (4.22) 将效度表示为一种变差的比例，是相关的平方。式 (4.22) 也可以写成

$$\text{效度} = \sqrt{\frac{\sigma_{T_r}^2}{\sigma_X^2}} \quad (4.23)$$

式 (4.23) 将效度表示成欲测量部分与实际测量结果之间相关。

在带有潜变量的问题中，如

$$X = \lambda\xi + \delta$$

若 $\lambda=1$ ，则有

$$\rho_{xx} = \frac{\Phi}{\text{Var}(X)} \quad (4.24)$$

若 $\lambda \neq 1$ ，则

$$\rho_{xx} = \frac{\lambda\Phi}{\text{Var}(X)} \quad (4.25)$$

式 (4.24) 和式 (4.25) 是 X 的可靠系数。对于

$$Y = \lambda\eta + \epsilon$$

若 $\lambda=1$ ，有

$$\rho_{yy} = \frac{\text{Var}(\eta)}{\text{Var}(Y)} \quad (4.26)$$

若 $\lambda \neq 1$ ，有

$$\rho_{yy} = \frac{\lambda\text{Var}(\eta)}{\text{Var}(Y)} \quad (4.27)$$

式 (4.26) 和式 (4.27) 是 Y 的可靠系数。





X, Y 的相关系数为:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \quad (4.28)$$

最后的计算结果视 X, Y 的表达式而定。

ξ, η 的相关平方为:

$$\rho_{\xi\eta}^2 = \frac{[\text{Cov}(\xi, \eta)]^2}{\text{Var}(\xi) \text{Var}(\eta)}$$

利用 ξ, η 与 X, Y 的关系, 也可以得到

$$\rho_{\xi\eta}^2 = \frac{\rho_{XY}^2}{\rho_{XX}\rho_{YY}} \quad (4.29)$$

一般可以利用上面的公式计算每个测量项目的分数与总和的相关关系, 若相关系数不显著, 表明该项目鉴别力低, 相关系数的显著性越高, 效度越高。

2. 内容效度

内容效度 (content validity) 指测量工具内容的适合性, 即是否反映想要测评的全部内容。如问卷内容是否能够涵盖所要研究问题的各个方面, 如果能够涵盖, 则具有优良的内容效度。例如, 研究学生对食堂的满意情况, 需要确定食堂的哪些服务与学生的满意有关, 学生关注什么方面, 哪些更主要等。问卷内容如果能充分涵盖这些, 则具有优良的内容效度。

一般认为内容效度是定性的判定, 较为主观, 可以采用德尔菲法, 即专家评估的方法。

3. 标准效度

标准效度 (criterion validity) 是指测验分数与反映测量问题的指标之间的相关程度, 即确定所设计的测量标准是有效的。标准效度的测定以相关系数表示, 称为标准效度系数。如图 4—2 所示。其中, C_1 是被认可的标准, 作为参照物。由图可以写出:

$$x_1 = \lambda_{11}\xi_1 + \delta_1$$

$$c_1 = \lambda_{21}\xi_1 + \delta_2$$

$$E(\delta_1) = E(\delta_2) = 0$$

(4.30)

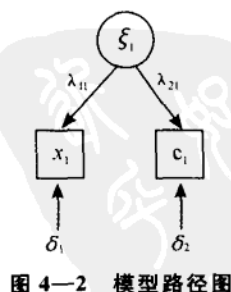


图 4—2 模型路径图



其标准效度的计算公式如式 (4.31)。

$$\begin{aligned}\rho_{x_1 c_1} &= \frac{\text{Cov}(x_1, c_1)}{\sqrt{\text{Var}(x_1) \text{Var}(c_1)}} \\ &= \frac{\lambda_{11} \lambda_{21} \phi_{11}}{\sqrt{\text{Var}(x_1) \text{Var}(c_1)}}\end{aligned}\quad (4.31)$$

若 x_1 与 c_1 没有区别, 有 $\text{Var}(x_1) = \text{Var}(c_1)$, 则分母为 $\text{Var}(\xi_1) = \phi_{11}$, 于是有 $\rho_{x_1 c_1} = \lambda_{11} \lambda_{21}$ 。因此, 可以根据 $\rho_{x_1 c_1}$ 的大小判定标准效度。若 x_1 能反映 ξ_1 , 则 x_1 与 c_1 有很强的相关性, $\rho_{x_1 c_1}$ 应较大, 即效度高。

采用标准效度系数测度有两个问题: 一是对潜变量 ξ_1 , 很难找到一个普遍认可的标准, 因而运用有困难; 二是标准的可靠性, 即使找到标准, 其可靠性如何判断也是个问题。因为这两个问题的存在, 使标准效度系数的计算和使用有一定困难。

4. 构造效度

构造效度 (construct validity) 亦称结构效度, 指测量工具的内容能够推论或衡量抽象概念的能力。结构效度评估依据是原有理论与测量工具二者的配合程度。其测量是从潜变量入手, 利用可测量变量的相关系数测度。

[例 4.5] 反映恐怖程度的效度。

分析: 一般认为民主程度越高, 越容易发生恐怖活动。它们之间存在正相关。若以 ξ_1 表示恐怖程度, 可以构造一个相关的潜变量民主程度, 记为 ξ_2 , 它们之间的关系如图 4—3, 建立的方程如式 (4.32)。

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_{11} \xi_1 + \delta_1 \\ x_2 &= \lambda_{22} \xi_2 + \delta_2\end{aligned}\quad (4.32)$$

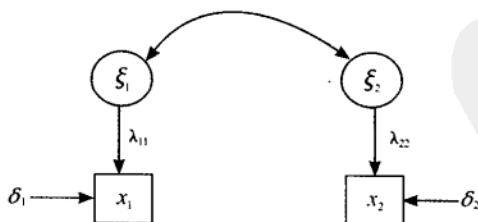


图 4—3 恐怖与民主程度路径图



利用 x_1, x_2 的相关系数, 测度结构效度。与式(4.31)类似有

$$\begin{aligned}\rho_{x_1 x_2} &= \frac{\text{Cov}(x_1, x_2)}{\sqrt{\text{Var}(x_1) \text{Var}(x_2)}} \\ \rho_{x_1 x_2}^2 &= \frac{\text{Cov}^2(x_1, x_2)}{\text{Var}(x_1) \text{Var}(x_2)} = \frac{\lambda_{11} \lambda_{22} \text{Cov}^2(\xi_1, \xi_2)}{\text{Var}(x_1) \text{Var}(x_2)} \\ &= \frac{\lambda_{11} \lambda_{22} \text{Cov}^2(\xi_1, \xi_2)}{\text{Var}(x_1) \text{Var}(x_2)} \cdot \frac{\text{Var}(\xi_1)}{\text{Var}(\xi_1)} \cdot \frac{\text{Var}(\xi_2)}{\text{Var}(\xi_2)}\end{aligned}$$

由于 $\text{Cov}^2(\xi_1, \xi_2) / \text{Var}(\xi_1) \text{Var}(\xi_2) = \rho_{\xi_1 \xi_2}^2$, 由式(4.25)和式(4.27)可知

$$\begin{aligned}\rho_{x_1 x_1} &= \frac{\lambda_{11} \text{Var}(\xi_1)}{\text{Var}(x_1)} \\ \rho_{x_2 x_2} &= \frac{\lambda_{22} \text{Var}(\xi_2)}{\text{Var}(x_2)}\end{aligned}$$

所以

$$\rho_{x_1 x_2}^2 = \rho_{\xi_1 \xi_2}^2 \rho_{x_1 x_1} \rho_{x_2 x_2}$$

因而

$$\rho_{x_1 x_2} = \rho_{\xi_1 \xi_2} \sqrt{\rho_{x_1 x_1} \rho_{x_2 x_2}} \quad (4.33)$$

由式(4.33)的关系可以看出 $\rho_{x_1 x_2}$ 偏低时, $\rho_{\xi_1 \xi_2}$ 也不会太高, 表明结构效度不够高, 有可能是构造的模型有问题。

如果模型构造有问题或效度不够高, 则所采集测量的数据不能有效地反映所要研究的问题, 变量选择有误, 表明问卷中问题的设计值得推敲。这时, 可以用主成分分析, 帮助考察所设计的问题即可测条目的重要性。第一主成分的方差贡献率的大小反映可测条目对潜变量或所研究目标的贡献, 贡献率越大说明与所研究问题或领域关系越密切, 一般认为大于 0.4 较好。

[例 4.6] 大学生工作预期数据的结构效度分析。

分析: 依据例 4.1 设计的问卷, 访问了 331 位同学, 运用 SPSS 11.0 因子分析, 得到各个潜变量第一主成分的方差贡献率如表 4—3。



表 4—3

第一主成分的方差贡献率

潜变量	方差贡献率 (%)
η_1	47.26
η_2	52.11
η_3	45.53
ξ_1	55.01
ξ_2	43.03

由表可以看出, 几组可测变量对潜变量的贡献都不是很大, 只有 ξ_1 和 η_2 的超过 0.5, 但按大于 0.4 的标准, 认为效度基本可以接受。

5. 共轭效度

共轭效度亦称同时效度, 是对聚合 (convergent) 和区别 (discriminant) 效度的测度。可以考虑利用不同的测量方法对同一潜变量进行测量, 根据测量结果的相关程度作出判定。

[例 4.7] 大学生的社会交往能力与学习能力。

分析: 引入潜变量 ξ_1 和 ξ_2 , 分别表示大学生的社会交往能力和学习能力。其中, ξ_1 有两个可测变量 x_1, x_3 ; ξ_2 有两个可测变量 x_2, x_4 。测量时, x_1 与 x_2 用同一方法, x_3 与 x_4 用另一种同样的方法。即对每一潜变量采用两种不同测量方法, 如量表测量打分、提出问题判断。为此, 引入潜变量 ξ_3 和 ξ_4 , 分别表示两种测量方法。变量之间关系如图 4—4 所示。得到的模型如式 (4.34)。

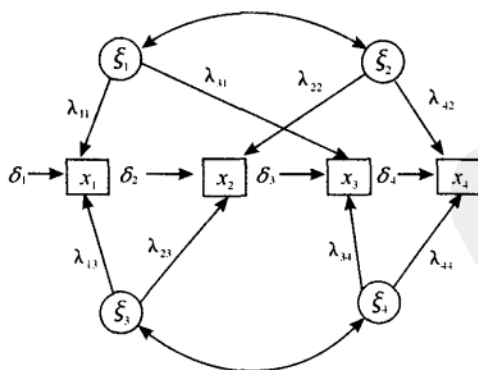


图 4—4 测度共轭效度路径图



$$\begin{aligned}
 x_1 &= \lambda_{11}\xi_1 + \lambda_{13}\xi_3 + \delta_1 \\
 x_2 &= \lambda_{22}\xi_2 + \lambda_{23}\xi_3 + \delta_2 \\
 x_3 &= \lambda_{31}\xi_1 + \lambda_{34}\xi_4 + \delta_3 \\
 x_4 &= \lambda_{42}\xi_2 + \lambda_{44}\xi_4 + \delta_4
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

因为, x_1, x_3 研究同一问题, 所以, 从理论上来说, x_1, x_3 的相关程度应该大于 x_1, x_4 的相关程度, 因而有

$$\rho_{x_1 x_3} > \rho_{x_1 x_4}$$

同样的道理, 有

$$\rho_{x_2 x_4} > \rho_{x_2 x_3}$$

但实际结果可能违背上面的假设, 可能是因为开始的假设并不永远成立。

由式 (4.31) 可知:

$$\begin{aligned}
 \rho_{x_1 x_3} &= \frac{\text{Cov}(x_1, x_3)}{\sqrt{\text{Var}(x_1)\text{Var}(x_3)}} \\
 &= \frac{\lambda_{11}\lambda_{31}\text{Var}(\xi_1) + \lambda_{13}\lambda_{34}\text{Cov}(\xi_3, \xi_4)}{\sqrt{\text{Var}(x_1)\text{Var}(x_3)}}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

假定 x_1, x_3 已经标准化, 则 $\text{Var}(x_1) = \text{Var}(x_3) = 1$, $\text{Var}(\xi_1) = 1$, $\text{Var}(\xi_3) = 1$, $\text{Var}(\xi_4) = 1$, 式 (4.35) 可表示为:

$$\rho_{x_1 x_3} = \lambda_{11}\lambda_{31} + \lambda_{13}\lambda_{34}\rho_{\xi_3 \xi_4} \tag{4.36}$$

其中, $\rho_{\xi_3 \xi_4}$ 反映两种测量方法之间的相关程度。如果 $\rho_{\xi_3 \xi_4}$ 是正的, 其数值越大, 表明两种测量方法越一致, $\rho_{x_1 x_3}$ 越大, 效度越高。如果 $\rho_{\xi_3 \xi_4}$ 是负的, 即 $\rho_{\xi_3 \xi_4} < 0$, 则会导致 $\rho_{x_1 x_3}$ 有一个很小的值, 表明效度很低。由于 $\rho_{\xi_3 \xi_4}$ 计算比较麻烦, 也可以通过因子载荷判定。虽然 x_1, x_3 是不同的测量方法, 但 x_1, x_3 测量同一问题, 因此, λ_{13} 与 λ_{34} 不应有太大的不同。估计 $\lambda_{13}, \lambda_{34}$, 可以对它们进行检验, 若没有显著性差异, 表明测量工具有较好的聚合效度。同样的方法可以计算得到 $\rho_{x_1 x_4}$ 。

$$\rho_{x_1 x_4} = \frac{\text{Cov}(x_1, x_4)}{\sqrt{\text{Var}(x_1)\text{Var}(x_4)}} = \lambda_{11} + \lambda_{13}\lambda_{44}\rho_{\xi_3 \xi_4}$$

若 $\rho_{x_1 x_3} > \rho_{x_1 x_4}$, 表明测量工具能够很好地区别不同的测量, 具有较高的



共轭效度。

6. 建议的方法

前面四种测定效度的方法是经典的，在潜变量的运用中有一定问题，如 $\rho_{\xi_3\xi_4}$ 的计算。因而，通常建议采用下面的方法。

(1) 未标准化效度系数。这类似于未标准化回归系数。利用未标准化效度系数的大小，结合实际判断效度。存在多个潜变量时，为多元回归系数。如用 x_1 测度 ξ_1 ，可以用系数 λ_{11} 说明用 x_1 反映 ξ_1 的效度，即 λ_{11} 的大小可以证明其效度，如式 (4.37)。

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_{11}\xi_1 + \delta_1 \\x_2 &= \lambda_{21}\xi_1 + \delta_2 \\E(\delta_i) &= 0, \text{Cov}(\delta_i, \xi_1) = 0, i=1, 2\end{aligned}\quad (4.37)$$

可以利用 λ_{11} 和 λ_{21} 的大小，反映用 x_1, x_2 测量 ξ_1 的效度。如 $\lambda_{11}, \lambda_{21}$ 均很小，或显著性检验未通过，则效度很低。

(2) 标准化效度系数。这类似于标准化回归系数。对于系数 λ_{ij} 进行标准化处理，得到标准化系数 λ_{ij}^* ，如式 (4.38)。

$$\lambda_{ij}^* = \lambda_{ij} \left[\frac{\phi_{ij}}{\text{Var}(x_i)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.38)$$

λ_{ij}^* 的大小在一定程度上可以反映 x_i 和 ξ_j 的关系。系数值越大，效度越高。

(3) 唯一效度。考察 x_i 对 ξ_j 的反映程度，可以计算唯一效度 $U_{x_i\xi_j}$ ，公式如式 (4.39)。

$$U_{x_i\xi_j} = R_{x_i}^2 - R_{x_i(\xi_j)}^2 \quad (4.39)$$

式中， $R_{x_i}^2$ 是模型中对 x_i 有直接影响的潜变量与 x_i 的相关系数平方； $R_{x_i(\xi_j)}^2$ 是模型中对 x_i 有直接影响的潜变量去掉 ξ_j 后的其余变量与 x_i 相关系数的平方，即所有对 x_i 有直接影响的潜变量去掉 ξ_j 后剩余变量与 x_i 相关系数的平方。

例如，由模型

$$x_1 = \lambda_{11}\xi_1 + \lambda_{12}\xi_2 + \delta_1$$

可以得到

$$R_{x_1}^2 = \frac{\lambda_{11}^2\phi_{11} + 2\lambda_{11}\lambda_{12}\phi_{12} + \lambda_{12}^2\phi_{22}}{\text{Var}(x_1)} \quad (4.40)$$



$R_{x_1(\xi_1)}^2$ 为考察对 x_1 有影响的所有潜变量 ξ_1, ξ_2 , 去掉 ξ_1 后 ξ_2 与 x_1 的相关程度, 因而

$$\begin{aligned} R_{x_1(\xi_1)}^2 &= \frac{[\text{Cov}(x_1, \xi_2)]^2}{\text{Var}(x_1)\phi_{22}} = \frac{\lambda_{11}^2\phi_{12}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{12}\phi_{12}\phi_{22} + \lambda_{12}^2\phi_{22}^2}{\text{Var}(x_1)\phi_{22}} \\ &= \frac{\lambda_{11}^2\phi_{12}^2/\phi_{22} + 2\lambda_{11}\lambda_{12}\phi_{12} + \lambda_{12}^2\phi_{22}}{\text{Var}(x_1)} \end{aligned} \quad (4.41)$$

则

$$\begin{aligned} U_{x_1\xi_1} &= R_{x_1}^2 - R_{x_1(\xi_1)}^2 \\ &= \frac{\lambda_{11}^2\phi_{11} - \lambda_{11}^2\phi_{12}^2/\phi_{22}}{\text{Var}(x_1)} \\ &= \frac{\lambda_{11}^2\left(\phi_{11} - \frac{\phi_{12}^2}{\phi_{22}}\right)}{\text{Var}(x_1)} \end{aligned} \quad (4.42)$$

类似地有

$$U_{x_1\xi_2} = R_{x_1}^2 - R_{x_1(\xi_2)}^2 = \frac{\lambda_{12}^2(\phi_{22} - \phi_{12}^2/\phi_{11})}{\text{Var}(x_1)} \quad (4.43)$$

可以定义 $R_{x_i}^2$ 为:

$$R_{x_i}^2 = \frac{\sigma_{x_i\xi}\Phi^{*-1}\sigma'_{x_i\xi}}{\text{Var}(x_i)} \quad (4.44)$$

式中, $\sigma_{x_i\xi}$ 是 $1 \times d$ 向量, 它的每一个元素是 $\xi_j (j=1, \dots, d; d \text{ 是与 } x_i \text{ 有直接影响的潜变量的数目})$ 与 x_i 的协方差; Φ^* 是对 x_i 有直接影响的 ξ 的方差—协方差阵。如式 (4.40) 中, 对 x_1 有直接影响的 ξ 为 ξ_1, ξ_2 , 故式中分子有 $\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{22}$ 。

$U_{x_i\xi_j}$ 反映在所有对 x_i 有直接影响的潜变量中, x_i 和 ξ_j 的相关程度, 其数值越大, 表明 x_i 对 ξ_j 的反映程度越高。当可测变量 x_i 只测度一个潜变量而不测度其他潜变量时, 唯一效度不必考虑。

三、信度的度量

信度是指测量的可信程度。因为只有可信的数据, 进行分析所得到的结



论才是可信的、有效的。

1. 信度的理解

信度亦可指测量的一致性程度，如相同的个人在不同的时间，以相同的测量工具测量，或以复本测量，或在不同情境下测量，所得结果的一致性程度即信度。若两次测量结果一致，表明测量结果具有稳定性、可靠性或可预测性。一致性越高，信度越高。如果将信度理解为测量中可以避免误差的程度，则信度就可以由测量中误差的大小加以说明。测量中通常有两类误差发生，即系统误差和随机误差。系统误差指由于方法不当等人为因素造成的误差。如问卷中设计题目不当或受访者没有正确理解而回答有误带来的偏差、数据录入失误引起的偏差等。随机误差则指测量时无法预测的误差，亦称非系统误差。在任何测量中，都应尽量避免系统误差，减小随机误差。测量的结果可以表示为式 (4.45)。

$$X = T + B + E \quad (4.45)$$

式中， X 是测量结果； T 是真实值； B 是系统误差； E 是随机误差。

若 $X = T$ ，则测量是可靠的或可信的。因此，误差越小，信度越高。一般情况下，认为系数误差可以避免，所以对于式 (4.45)，有

$$E(X) = E(T)$$

假设 $E(E) = 0$ ， $\text{Cov}(T_i, E_i) = 0$ ，则有

$$\sigma_X^2 = \sigma_T^2 + \sigma_E^2 \quad (4.46)$$

信度可以定义为式 (4.47)。

$$\text{信度} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2} = 1 - \frac{\sigma_E^2}{\sigma_X^2} \quad (4.47)$$

这时，信度表示成一种变差的比例，即相关系数的平方，或如式 (4.48)。

$$\text{信度} = \sqrt{\frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2}} \quad (4.48)$$

这时，信度表示成一种相关系数的形式。

2. 等值性信度

等值性信度是考虑误差有多少来自不同的受试者或不同测量项目的测



量。探讨特定时间时,不同受试者或测量项目所造成的变异。

以两个测量变量 x_i 和 x_j 加以说明。见式 (4.49)。

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_i \tau_i + e_i \\ x_j &= \alpha_j \tau_j + e_j \end{aligned} \quad (4.49)$$

其中, τ_i 与 τ_j 是测量的真实分值, x_i 与 x_j 是测量结果。假定 x_i 和 x_j 的真实得分是同样的, 即有 $\tau_i = \tau_j$, 则视 α_i 和 α_j 以及 $\text{Var}(e_i)$ 和 $\text{Var}(e_j)$ 的不同情况, 检验理论中形成三种主要类型的测量。

如果 $\alpha_i = \alpha_j = 1$, 且 $\text{Var}(e_i) = \text{Var}(e_j)$, 则 x_i 与 x_j 是平行 (parallel) 测量;

如果 $\alpha_i = \alpha_j = 1$, 但 $\text{Var}(e_i) \neq \text{Var}(e_j)$, 则是 τ 等价 (tau-equivalent) 测量;

如果 $\alpha_i \neq \alpha_j$, 且 $\text{Var}(e_i) \neq \text{Var}(e_j)$, 则为类似 (congeneric) 测量。

信度系数 $\rho_{x_i x_i}$ 定义如式 (4.50)。

$$\rho_{x_i x_i} = \frac{\alpha_i^2 \text{Var}(\tau_i)}{\text{Var}(x_i)} \quad (4.50)$$

系数 $\rho_{x_i \tau_i}^2$ 是 x_i 与 τ_i 的相关平方, 如式 (4.51)。

$$\rho_{x_i \tau_i}^2 = \frac{[\text{Cov}(x_i, \tau_i)]^2}{\text{Var}(x_i) \text{Var}(\tau_i)} = \frac{\alpha_i^2 [\text{Var}(\tau_i)]^2}{\text{Var}(x_i) \text{Var}(\tau_i)} = \frac{\alpha_i^2 \text{Var}(\tau_i)}{\text{Var}(x_i)} = \rho_{x_i x_i} \quad (4.51)$$

式 (4.51) 表明, x_i 和 τ_i 的相关平方可以是信度系数 $\rho_{x_i x_i}$ 。由于 $\text{Var}(x_i) = \alpha_i^2 \text{Var}(\tau_i) + \text{Var}(e_i)$, 当 $\text{Var}(e_i) = 0$ 时, $\text{Var}(x_i) = \alpha_i^2 \text{Var}(\tau_i)$, 有 $\rho_{x_i x_i} = \rho_{x_i \tau_i}^2 = 1$ 。这表明, 没有测量误差, 信度等于 1, 可以完全相信测量结果。理想的平行测量工具在实际中不存在, 因而通常采用以下几种方法测量信度。

3. 重测信度

重测信度是考察测量的稳定性。用一种测量工具, 对同一群受试者检测, 再检测, 即在不同时间重复进行测量, 两次测量结果计算的可靠系数, 即为重测信度。若问卷设计合理, 第一次和第二次回答结果应该高度相关。

若

$$x_t = \alpha_t \tau_t + e_t$$



$$x_{t+1} = \alpha_{t+1} \tau_{t+1} + e_{t+1} \quad (4.52)$$

则

$$\rho_{x_t, x_{t+1}} = \frac{\text{Cov}(x_t, x_{t+1})}{\sqrt{\text{Var}(x_t) \text{Var}(x_{t+1})}} = \frac{\text{Cov}(\alpha_t \tau_t + e_t, \alpha_{t+1} \tau_{t+1} + e_{t+1})}{\sqrt{\text{Var}(x_t) \text{Var}(x_{t+1})}}$$

在式 (4.52) 中, $E(e_t) = E(e_{t+1}) = 0$, 若两次测量误差无关, 即 $\text{Cov}(e_t, e_{t+1}) = 0$, 若 $\alpha_t = \alpha_{t+1} = 1$ 且 $\text{Var}(e_t) = \text{Var}(e_{t+1})$, 则

$$\rho_{x_t, x_{t+1}} = \frac{\text{Cov}(\tau_t + e_t, \tau_{t+1} + e_{t+1})}{\sqrt{\text{Var}(x_t) \text{Var}(x_{t+1})}} = \frac{\text{Cov}(\tau_t, \tau_{t+1})}{\sqrt{\text{Var}(x_t) \text{Var}(x_{t+1})}}$$

当两次测量能够一致时, 有

$$\text{Cov}(\tau_t, \tau_{t+1}) = \text{Var}(\tau_t)$$

$$\text{Var}(x_t) = \text{Var}(x_{t+1})$$

因而

$$\rho_{x_t, x_{t+1}} = \frac{\text{Var}(\tau_t)}{\text{Var}(x_t)} = \rho_{\tau_t, \tau_t} \quad (4.53)$$

所以, 两次测量结果的一致性, 可以用 $\rho_{x_t, x_{t+1}}$ 与 ρ_{τ_t, τ_t} 的差异测量。

这一测量的不足在于: 一是测量间隔, 测量间隔多长为宜是一个问题。测量的间隔时间内, 很难保证研究对象特征不变化, 误差并不随机。二是重复测量可能受前一次测量影响, 因而无法保证两次测量误差不相关。

在同一人群中测量两次, 重测信度的大小受两方面影响。一是评价者间信度, 如果在同一人群中测量两次, 则误差主要来源于对问卷理解的差异, 通常要求重测信度在 0.65~0.95 之间, 最好高于 0.85; 二是复测信度, 这是两次测量在不同人群中进行, 要求重测信度在 0.70 以上。但是实际很难达到, 因为影响因素太多。对某些项目或问题的重测信度达到 0.5 以上即可。

4. 内部一致性信度

(1) 折半信度。折半信度 (split-halves) 用以测量项目之间的内部一致性 (internal consistency)。将测量分为两组题目, 例如奇数题, 偶数题, 或前一半为一组, 后一半为另一组, 求两部分的相关系数。两部分相关程度越



高, 表明测量工具在内部一致性方面具有越高的信度。

以 x_1, x_2 测量 τ_1 , 有

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau_1 + e_1 \\ x_2 &= \tau_1 + e_2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

假定

$$\begin{aligned} E(e_1) &= E(e_2) = 0 \\ \text{Cov}(\tau_1, e_1) &= \text{Cov}(\tau_1, e_2) = 0 \\ \text{Cov}(e_1, e_2) &= 0 \end{aligned}$$

若 x_1 与 x_2 相等, 则 x_1, x_2 相关系数为:

$$\rho_{x_1 x_2} = \frac{\text{Cov}(x_1, x_2)}{\sqrt{\text{Var}(x_1) \text{Var}(x_2)}} = \frac{\text{Var}(\tau_1)}{\text{Var}(x_1)} = \rho_{x_1 \tau_1} = \rho_{x_2 \tau_2} \quad (4.55)$$

若 x_1, x_2 共同测度 τ_1 , 其与 τ_1 的相关平方为整个部分的信度系数, 有

$$\begin{aligned} \rho_{\tau_1(x_1+x_2)}^2 &= \frac{[\text{Cov}(\tau_1, x_1+x_2)]^2}{\text{Var}(\tau_1) \text{Var}(x_1+x_2)} \\ &= \frac{[\text{Cov}(\tau_1, 2\tau_1 + e_1 + e_2)]^2}{\text{Var}(\tau_1) [\text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + 2\text{Cov}(x_1, x_2)]} \\ &= \frac{[\text{Cov}(\tau_1, \tau_1 + \tau_1)]^2}{\text{Var}(\tau_1) [\text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + 2\text{Cov}(x_1, x_2)]} \\ &= \frac{4[\text{Var}(\tau_1)]^2}{\text{Var}(\tau_1) [\text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + 2\text{Cov}(x_1, x_2)]} \\ &= \frac{4\text{Var}(\tau_1)}{\text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + 2\text{Cov}(x_1, x_2)} \end{aligned} \quad (4.56)$$

若 x_1, x_2 能够共同测度 τ_1 , 即测度结果可以折半, 有 $x_1 = x_2$, 则

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_1) &= \text{Var}(x_2) \\ \text{Cov}(x_1, x_2) &= \text{Var}(\tau_1) \end{aligned}$$

式 (4.56) 可以写为:

$$\rho_{\tau_1(x_1+x_2)}^2 = \frac{4\text{Var}(\tau_1)}{2\text{Var}(\tau_1) + 2\text{Var}(x_1)}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\text{Var}(\tau_1)}{\text{Var}(\tau_1) + \text{Var}(x_1)} \\
 &= \frac{2\text{Var}(\tau_1)/\text{Var}(x_1)}{\text{Var}(x_1)/\text{Var}(x_1) + \text{Var}(\tau_1)/\text{Var}(x_1)}
 \end{aligned}$$

依式 (4.55), 有

$$\rho_{\tau_1(x_1+x_2)}^2 = \frac{2\rho_{x_1x_1}}{1+\rho_{x_1x_1}} \quad (4.57)$$

按式 (4.55), 式 (4.57) 也可以写成

$$\rho_{\tau_1(x_1+x_2)}^2 = \frac{2\rho_{x_1x_2}}{1+\rho_{x_1x_2}}$$

折半信度是将所有题目分为两部分, 分别计算每位受试者在这两部分的得分, 再求这两部分的相关系数 $\rho_{x_1x_2}$, 两部分越相关, $\rho_{x_1x_2}$ 越接近于 1, 则 $\rho_{\tau_1(x_1+x_2)}^2$ 也越接近于 1, 即信度越高。采用折半信度的关键是如何折半, 折半不同, 所得结果也往往不同。

[例 4.8] 大学生工作预期数据的折半信度分析。

分析: 将设计的问卷所有题目随机分成内容类似的两组, 取这两组的相关系数作为折半信度。331 份问卷数据运用 SPSS 11.0 完成计算, 得到折半信度系数为 0.622 1。这表明, 信度不是很高, 但还可以接受。

(2) α 系数。式 (4.57) 建立在两半题项得分的方差相等的假定上, 但实际数据并不一定满足这一假定。如果两半的方差不相等, 折半信度往往被低估。克朗巴哈 (Cronbach) 提出用 α 系数测量信度, 即累加利克特量表的信度。

$$\text{记 } \sum_{i=1}^q x_i = H$$

q 个题目反映同一问题, 有

$$x_1 = \tau_1 + e_1$$

.....

$$x_q = \tau_1 + e_q$$

则





$$\text{Var}(H) = q^2 \text{Var}(\tau_1) + \sum_{i=1}^q \text{Var}(e_i)$$

因而

$$\rho_{\tau_1 \cdot H}^2 = \frac{[\text{Cov}(\tau_1, H)]^2}{\text{Var}(\tau_1) \text{Var}(H)} = \frac{[\text{Cov}(\tau_1, x_1 + x_2 + \cdots + x_q)]^2}{\text{Var}(\tau_1) \text{Var}(H)} \quad (4.58)$$

仿照式 (4.50) 信度系数 $\rho_{\tau_i \tau_i}$ 的定义, α 系数的计算如式 (4.59)。

$$\begin{aligned} \rho_{HH}^2 &= \frac{q^2 \text{Var}(\tau_1)}{\text{Var}(H)} = \frac{q^2 (q-1) \text{Var}(\tau_1)}{(q-1) \text{Var}(H)} \\ &= \frac{q}{q-1} \left[\frac{q^2 \text{Var}(\tau_1) - q(\text{Var}(\tau_1))}{\text{Var}(H)} \right] \\ &= \frac{q}{q-1} \left[\frac{q^2 \text{Var}(\tau_1) + \sum_{i=1}^q \text{Var}(e_i) - q \text{Var}(\tau_1) - \sum_{i=1}^q \text{Var}(e_i)}{\text{Var}(H)} \right] \\ &= \frac{q}{q-1} \left[1 - \frac{q \text{Var}(\tau_1) + \sum_{i=1}^q \text{Var}(e_i)}{\text{Var}(H)} \right] \\ &= \frac{q}{q-1} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^q \text{Var}(x_i)}{\text{Var}(H)} \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

式中, q 是量表中题目的总数, 即 x_i 的个数; $\text{Var}(x_i)$ 是第 i 题得分的题内方差, 若测量结果服从正态分布, 则题内不同人结果的差异不应太大, 即方差较小; $\text{Var}(H)$ 是总题项 (总得分) 的方差。

α 系数越接近于 1, 信度越高。一般来说, 该系数大于或等于 0.7, 认为其内部一致性较高; 在 0.35~0.7 之间, 认为内部一致性普通; 小于 0.35 则较低。 α 系数还可以用于问卷修正。删除某变量后, 如果 α 系数提高, 则表明删除是合适的。

[例 4.9] 大学生工作预期数据的内部一致性信度分析。

分析: 由式 (4.59) 可知, α 系数实际是可测变量的数目以及其平均相关系数的函数, 也是用于测量各个可测变量反映潜变量的程度。根据采集的 331 份问卷的数据, 运用 SPSS 11.0 计算 α 系数, 得到结果如表 4—4。



表 4—4

大学生工作预期数据的信度

潜变量	可测变量	相关系数	α 系数
η_1	y_1	0.041 9	0.512 3
	y_2	0.266 1	
	y_3	0.290 3	
η_2	y_4	0.373 2	0.536 8
	y_5	0.423 5	
	y_6	0.194 6	
	y_7	0.325 0	
η_3	y_8	0.208 0	0.591 3
	y_9	0.472 4	
	y_{10}	0.450 9	
	y_{11}	0.370 7	
ξ_1	x_1	0.357 2	0.587 3
	x_2	0.425 0	
	x_3	0.414 5	
ξ_2	x_4	0.195 8	0.338 7
	x_5	0.287 4	
	x_6	0.222 3	

由表可以看出,总的来说, α 系数都不大,特别是 ξ_2 的 α 系数小于0.35,过低,每个可测变量与潜变量的相关系数均较低,表明用这三个可测变量反映潜变量值得推敲。表中的相关系数,是每一变量得分与总得分(反映潜变量的分值)之间的相关系数。 η_1 中的 y_1 与 η_1 的相关系数过低,如果删除该变量重新计算 α 系数,则由0.512 3提高到0.674 0。这表明删除该变量可能是合适的。同样地, η_2 中 y_6 与 η_2 的相关系数也很低,删除该变量重新计算 α 系数将为0.581 5,也有所提高。从内部一致性信度分析,上述两个变量似乎应该删除,但是否一定删除,最好结合模型修正通盘考虑。 α 系数为问卷修订、模型修正提供了可参考的依据。

折半信度、 α 系数都用于测度量表内部的一致性。前者是两半量表测量结果间的一致性;后者为量表中每一题项得分间的一致性即同质性。

(3) 构造信度。构造信度(construct reliability)主要是评价潜变量的信度,即一组可测变量(指标)共同说明某一潜变量的程度。它也是反映内部一致性的指标。

设有一潜变量 τ ,其中一观测量为 x_1 ,二者关系为:



$$x_1 = b_1 \tau + \epsilon_1$$

观测变量 x_1 的方差为:

$$\text{Var}(x_1) = b_1^2 \text{Var}(\tau) + \text{Var}(\epsilon_1)$$

传统信度系数定义如式 (4.47)。

$$\text{信度系数} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2} = 1 - \frac{\sigma_E^2}{\sigma_X^2}$$

考察 τ 的所有观测变量 $x_i (i=1, \dots, m)$ 共同说明 τ 的程度, 可以利用未标准化系数 $b_i (i=1, \dots, m)$, 潜变量方差以及测量误差的方差, 仿照传统信度系数定义方式, 建立构造信度计算公式, 如式 (4.60)。

$$CR = \frac{\left(\sum_{i=1}^m b_i \right)^2 \text{Var}(\tau)}{\left(\sum_{i=1}^m b_i \right)^2 \text{Var}(\tau) + \sum_{i=1}^m \text{Var}(\epsilon_i)} \quad (4.60)$$

式 (4.60) 与式 (4.47) 的基本思路是一致的, 式 (4.60) 是式 (4.47) 的延伸。如果采用标准化系数, 则式 (4.60) 可以写成式 (4.61)。

$$CR = \frac{(\sum \lambda)^2}{(\sum \lambda)^2 + \sum (\epsilon)} \quad (4.61)$$

式中, CR 是构造信度; λ 是可测变量在潜变量上的标准化系数, 即标准化因子载荷; ϵ 是可测变量的测量误差。

由式 (4.61) 可知, CR 的取值在 $0 \sim 1$ 之间, 越接近 1, 信度越高, 表明构成这一潜变量的指标之间关联度较高, 即这一测量中各个指标间一致性越高; 若信度较低, 表示各指标间较不一致, 作为反映潜变量的可测变量是比较差的。构造信度的大小反映可测变量能够测量潜在结构的程度, 最好大于 0.7。目前, 关于信度系数的取值, 并没有一个统一认可的界限。但一般认为, 在 0.9 以上是“最好的”; 0.8 左右为“非常好”; 0.7 是“适中”; 0.5 以上“可以接受”; 低于 0.5 表明至少有一半的观测变异来自于随机误差, 因而信度不够高, 不能接受。在实际应用中, 为保证潜变量的可信程度, 通常采用 0.6 作为可以接受的标准。

四、效度和信度的关系

信度, 仅考虑测量结果是否一致, 不涉及结果是否正确; 效度, 针对测



量目的，考察测量的有效程度。测量结果要有效是前提。在有效的前提下再考虑测量的精确性，因为可信不一定有效。

影响信度的因素有两类：人为因素和客观因素。人为因素包括问卷设计、调查者和受试者水平；客观因素主要是受试者受限，样本不足等。为保证信度，在调查方案设计和问卷设计等方面，都应有严格要求，力求科学、合理及可操作；调查实施及数据录入都应有严格的质量控制。

第四节 偏最小二乘法的应用

一、偏最小二乘法的基本思想

偏最小二乘法 (partial least squares, PLS)，是将主成分分析与多元回归结合，进行迭代估计的一种方法。

1. 问题的提出

在多元线性回归中，当解释变量的个数超过样本的个数，或存在多重共线性时，普通最小二乘法难以运用。通常的解决方法是选用较少的解释变量，但这往往带来信息损失、估计预测精度困难。运用主成分回归，可以用主成分作为回归解释变量，一方面减少解释变量的个数，另一方面可以降低或消除共线性。但如何决定删除哪些成分，并没有固定的原则，需要根据实际问题确定。偏最小二乘法 (PLS) 正是为解决这些问题而产生的一种参数估计方法。

2. 基本思路

从数据处理出发，对数据信息进行分解、筛选，提取对系统解释性最强的综合变量，剔除多重相关信息和无解释意义信息的干扰。用于多因变量对多自变量，即多对多的数据类型。通过多元统计分析方法综合运用，使得数据结构简化。

3. 有关方法回顾

多元统计中的主成分分析，是表内成分提取法。其目的是将高维数据降维，省去变异不大的变量方向，利用变量间的方差—协方差，使得主成分之间的协方差等于零。主成分分析，使所提取的主成分尽可能多地携带原数据表中的信息，对原数据表的变异情况具有最强的解释能力。



多元统计中典型相关分析是表间成分提取法。典型相关分析, 分别在 X, Y 中提取相关性最大的两个成分, 通过测定这两个成分之间的相关关系, 推测两组变量间相关关系。 X 中提取一个典型成分 F_1 , F_1 是 x_1, \dots, x_p 的线性组合; Y 中提取一个典型成分 G_1 , G_1 是 y_1, \dots, y_q 的线性组合。要求 F_1 和 G_1 的相关程度达到最大, 这就是第一个典型成分。

二、PLS 的基本方法

(一) 方法概述

PLS 是对变量系统的信息重新综合筛选, 从中选取若干对系统具有最佳解释能力的新的综合变量, 即成分, 利用成分进行回归建模。

因变量 $Y: \{y_1, \dots, y_q\}$, q 个因变量; 自变量 $X: \{x_1, \dots, x_p\}$, p 个自变量。每个变量都有 n 个观测样本点。

首先分别在 X, Y 中提取成分 t_1, u_1 。 t_1 是 x_1, \dots, x_p 的线性组合; u_1 是 y_1, \dots, y_q 的线性组合。要求: t_1, u_1 应尽可能大地携带各自数据表中的变异信息, 即具有代表性; 同时, 自变量的成分 t_1 对因变量的成分 u_1 有最强的解释力, 即 t_1 与 u_1 的相关程度能够达到最大, 也就是具有高度相关性。

然后实施 X 对 t_1 的回归和 Y 对 t_1 的回归, 如果满足精度要求, 则停止计算。若未达到满意精度, 利用 X 被 t_1 解释后的残余信息和 Y 被 t_1 解释后的残余信息, 进行第二轮成分提取。如此反复, 直到满足精度要求。

最后 X 提取 m 个成分 t_1, \dots, t_m , 实施 $y_k (k=1, \dots, q)$ 对 t_1, \dots, t_m 的回归, 再表达成 y_k 关于 x_1, \dots, x_p 的回归。

(二) 通常的计算

1. 数据标准化处理

对数据标准化处理后, x 为 $E_0(E_{01}, \dots, E_{0p})_{n \times p}$, Y 为 $F_0(F_{01}, \dots, F_{0q})_{n \times q}$ 。

2. 提取成分

t_1 是 E_0 的第一主成分

$$t_1 = E_0 W_1$$

式中, W_1 是 E_0 的第一个轴, $\|W_1\| = 1$ 为单位向量。

u_1 是 F_0 的第一主成分

$$u_1 = F_0 C_1$$



式中, C_1 是 F_0 的第一个轴, $\|C_1\| = 1$ 为单位向量。

根据主成分原理, 要求 $\text{Var}(t_1)$ 为最大, $\text{Var}(u_1)$ 为最大, 能分别很好地代表 X, Y 数据的变异信息。

由典型相关分析, $r(t_1, u_1)$ 为最大, 即最具解释力。

综合上述, $\text{Cov}(t_1, u_1) = \sqrt{\text{Var}(t_1) \text{Var}(u_1)} \cdot r(t_1, u_1)$ 为最大。即 (优化问题)

$$\begin{aligned} \max_{W_1, C_1} \{E_0' W_1, F_0' C_1\} \\ \text{s. t. } & \begin{cases} W_1' W_1 = 1 \\ C_1' C_1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

这表明, 在约束条件 $\|W_1\|^2 = 1, \|C_1\|^2 = 1$ 下, 求 $(W_1' E_0' F_0 C_1)$ 的最大值。式中, W_1 是对应于矩阵 $E_0' F_0 F_0' E_0$ 最大特征值的单位特征向量; C_1 是对应于矩阵 $F_0' E_0 E_0' F_0$ 最大特征值的单位特征向量。

3. 实施回归, 反复计算

E_0 在 t_1 上的回归, 生成残差矩阵 $E_1, E_0 = t_1 p_1' + E_1$ 。

F_0 在 t_1 上的回归, 生成残差矩阵 $F_1, F_0 = u_1 q_1' + F_1$, 用 t_1 替代 u_1 , 得到 F_0 的另一表达式: $F_0 = t_1 r_1' + F_1$ 。

式中, 回归系数向量 $p_1 = \frac{E_0' t_1}{\|t_1\|^2}; q_1 = \frac{F_0' u_1}{\|u_1\|^2}; r_1 = \frac{F_0' t_1}{\|t_1\|^2}$, 以 E_1, F_1 取代 E_0, F_0 进行第二轮成分 t_2, u_2 提取计算。

$$t_2 = E_1 W_2$$

$$u_2 = F_1 C_2$$

可以反复提取成分, 成分都有其含义。

$$t_h = E_{h-1} W_h = E_0 W_h^* = \sum_{j=1}^p W_{hj}^* E_{0j}$$

式中, E_{0j} 是 x_j 标准化后的变量; W_{hj}^* 权重越大, x_j 在构造 t_h 时的边际贡献就越大。

$$Y = t_1 r_1' + \cdots + t_m r_m' + F_m$$

即 $(y_1, \cdots, y_q) = t_1 (r_{11} + \cdots + r_{1q}) + \cdots + t_m (r_{m1} + \cdots + r_{mq}) + F_m$



$$\text{有} \quad y_j = \sum_{h=1}^m r_{hj} t_h + F_m(j)$$

式中, $F_m(j)$ 是 F_m 的第 j 个分量。

根据权重 r_{hj} 的取值, 可以判断 t_h 主要用于解释 Y 中的哪一部分信息。

4. 还原回归方程

$$y_k^* = F_{0k}$$

$$x_j^* = E_{0j}$$

$$y_k^* = \alpha_{k1} x_1^* + \cdots + \alpha_{kp} x_p^* + F_{Ak}, \quad k = 1, 2, \cdots, q$$

三、潜变量路径模型应用

(一) 基本思路

对于结构方程模型来说, 由于潜变量不可直接观测, 即没有观测数据, 因而参数估计变得比较麻烦。前面探讨的估计方法都避开了潜变量的取值, 利用方差-协方差关系估计参数。PLS 与它们不同, 试图估计出潜变量的值, 然后用最小二乘法估计参数。

由测量模型式 (1.12)

$$X = \Lambda_x \xi + e$$

可以得到潜变量的另一种表达形式, 即可以表示成可测变量的加权和, 如式 (4.62)。

$$\xi_{ki} = \sum_{h=1}^{H_k} (w_{kh} x_{khi}) \quad (4.62)$$

式中, H_k 是第 k 个潜变量的可测变量个数, $k=1, \cdots, K$; n 是第 n 个观测样本, $n=1, \cdots, N$; w_{kh} 是第 k 个潜变量的第 h 个可测变量的权重, $h=1, \cdots, H_k$; x_{khi} 是第 k 个潜变量的第 h 个可测变量的第 n 个观测值。

PLS 估计结构方程模型的参数, 主要有以下步骤:

第一步, 估计 ξ_{ki} , 即估计每个潜变量的值。这一步采用迭代的方法。 x_{khi} 为实际观测值已知, 类似于前面 PLS 中提取 t_1 。 w_{kh} 需要求解, 即前面 PLS 中的权重 w_1 , 由于潜变量路径模型中包含变量间的关系, 因而必须将这些关系考虑进来。

第二步, 测量模型参数估计。这时, 由于每个潜变量值已经估计出来,



式 (4.63) 类似于普通回归, 可以采用普通最小二乘法 (OLS) 估计。

$$x_{khn} = p_{kh}\xi_{kn} + e_{khn} \quad (4.63)$$

式中, 同一潜变量的不同的 h 都用相同的 ξ_{kn} 。估计时, k 是固定的, 如 x_{5hn} , ξ_{5n} 表示第 5 个潜变量的各个可测变量观测值和该潜变量不同受访者的估计值。运用 OLS, 估计 p_{kh} , 得到测量模型参数 Δ_x , Δ_y 。

第三步, 结构模型参数估计。根据前面估计得到的各个 ξ , η , 运用 OLS, 估计得到模型 $\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta$ 的参数 B , Γ 。

(二) 潜变量估计思路

结构方程模型的 PLS 建立, 关键是潜变量的估计, 由式 (4.63) 可得 ξ_{kn} 的表达式, 如式 (4.64)。

$$\xi_{kn} = \sum_{h=1}^{H_k} (w_{kh} \cdot x_{khn}) = f_k \sum (U_{kh} x_{khn}) \quad (4.64)$$

式中, ξ_{kn} 是第 k 个潜变量的第 n 个值, 是对 h 求和的结果; w_{kh} 由权重关系决定, 包括 x_{kn} 与 ξ_k 的关系, 还包括 ξ_k 与相邻潜变量的关系, 用符号反映。

将 w_{kh} 用式 (4.65) 表示

$$w_{kh} = f_k U_{kh} \quad (4.65)$$

式中, f_k 是个标量, 给出了 ξ_{kn} 关于 N 的单位方差 (方差为 1, unit Variance), 其由式 (4.66) 得到。

$$\begin{aligned} f_k &= \pm N^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_h \left[\sum_n (U_{kh} x_{khn}) \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\sum \left[\sum (U_{kh} x_{khn}) \right]^2}{N}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

式中, $\sum_h (U_{kh} x_{khn})$ 为第 k 个潜变量的每一个观测变量的观测值用 U_{kh} 的符号关系调整, 求和后平方。

f_k 的符号不确定性, 由式 (4.67) 解决, 即

$$\text{signum} f_k = \text{signum} \left\{ \sum_h [\text{signum} r(x_{kh} \xi_k)] \right\} \quad (4.67)$$

记 U_k 是与第 k 个潜变量相关联的其他潜变量的符号和, 则



$$U_k = \sum_c S_{kc} \xi_c \quad (4.68)$$

$$U_{kn} = \sum_c S_{kc} \xi_{cn} \quad (4.69)$$

$$S_{kc} = \begin{cases} \text{signum}r(\xi_k, \xi_c), k \neq c, & \text{若 } \xi_k \text{ 直接与 } \xi_c \text{ 有联系, 即路径} \\ & \text{图上有箭头直接指向} \\ 0, & \text{若路径图上, } \xi_k \text{ 与 } \xi_c \text{ 不是相邻的} \end{cases}$$

S_{kc} 的符号等同于相关 $r_{kc} = \text{Cov}(\xi_k, \xi_c)$ 的符号。

由式 (4.68), 可以产生一个 ξ_k 的新估计, 是 ξ_k 伴随 ξ_c 的, 继而由式 (4.64)

$$\hat{\xi}_{kn} = f_k \sum (U_{kn} x_{khn})$$

可以得到 ξ_{kn} 的一个新的估计。

(三) 具体步骤

1. 数据标准化

对所采集的数据进行标准化, 以避免量纲的影响。

2. 估计潜变量 ξ 值

(1) 初始值确定。根据式 (4.64) 计算潜变量的值, 需要给出初始权重 w_{kh} 。通常令 $w_{kh}^{(1)} = 1$ 。

(2) 第一次迭代, 记迭代次数 $a=1$ 。

由式 (4.64) 得:

$$\xi_{kn}^{(1)} = \sum_h w_{kh}^{(1)} x_{khn} = \sum_h x_{khn}$$

可以计算出 $\xi_{kn}^{(1)}$ 。再求

$$U_{kn}^{(1)} = \sum_c (S_{kc}^{(1)} \xi_{cn}^{(1)})$$

式中 $S_{kc}^{(1)} = \text{signum}r(\xi_k^{(1)}, \xi_c^{(1)})$

由于 $f_k^{(1)} = \pm N^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_n \left[\sum_h (U_{kh} x_{khn}) \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$

得到调整的权重

$$\hat{w}_{kh}^{(1)} = f_k^{(1)} U_{kh}^{(1)}$$





得到新的估计

$$\hat{\xi}_{kn}^{(1)} = \sum_h \hat{w}_{kh}^{(1)} x_{khn}$$

根据

$$x_{khn} = w_{kh} \hat{\xi}_{kn}^{(1)} + e_{khn}$$

运用 OLS, 可求得 $w_{kh}^{(2)}$ 。将 $w_{kh}^{(2)}$ 作第二次迭代的初始值, 进行新一轮的迭代。如此反复, 迭代到第 a 步。

(3) 迭代从第 a 步到 $a+1$ 步。 $w_{kh}^{(a)}$ 已求出, 作为初始值, 由式 (4.64) 得

$$\begin{aligned}\xi_{khn}^{(a)} &= w_{kh}^{(a)} x_{khn} \\ U_{kh}^{(a)} &= \sum_c (S_{kc}^{(a)} \xi_{cn}^{(a)})\end{aligned}$$

调整权重

$$\hat{w}_{kh}^{(a)} = f_k^{(a)} \cdot U_{kh}^{(a)}$$

得到新的估计值

$$\hat{\xi}_{kn}^{(a)} = \sum \hat{w}_{kh}^{(a)} x_{khn}$$

根据

$$x_{khn} = w_{kh} \hat{\xi}_{kn}^{(a)} + e_{khn}$$

运用 OLS, 得到第 $a+1$ 步的初始权重 $w_{kh}^{(a+1)}$ 。如果满足式 (4.70), 则迭代停止, 第 a 步迭代得到的潜变量估计值, 就是最后的估计结果。

$$|w_{kh}^{(a+1)} - w_{kh}^{(a)}| / w_{kh}^{(a)} \leq 10^{-5} \quad (4.70)$$

PLS 估计潜变量, 主要用到两个公式式 (4.71) 和式 (4.72)。

$$\xi_{kh} = \sum_h w_{kh} x_{khn} + d_{kn} \quad (4.71)$$

$$x_{khn} = w_{kh} \xi_{khn} + e_{khn} \quad (4.72)$$

式 (4.71) 中 w_{kh} 是内部权重。因为调整的内权包含了潜变量之间的关



系, 即结构内部关系, 是一个内部近似。式 (4.72) 中 w_{kh} 是外部权重。该式反映潜变量与可测变量之间的关系, 是一个外部近似。PLS 对潜变量的估计, 正是围绕式 (4.71) 和式 (4.72), 反复利用式 (4.62) ~ 式 (4.69), 进行迭代, 直到权重满足一定的收敛标准, 迭代停止。

附录 测量误差的影响

传统的回归中, 都假设解释变量没有测量误差, 即假设变量能用单一指标准确测量。实际上这一假设可能并不成立。如果可测变量有测量误差, 对潜变量与可测变量参数的估计结果有什么影响, 需要进行讨论。本部分将讨论四种情况: 单变量、双变量和简单回归、多元回归、多方程系统情况下, 测量误差的影响。

一、单变量的情况

单变量是指仅有一个潜变量的情况。

1. 均值的结果

[附例 1] 一个可测变量测量一个潜变量。

分析: 若一个可测变量测量一个潜变量, 且可测变量有测量误差, 有

$$x_1 = V_1 + \lambda_{11}\xi_1 + \delta_1$$

其中, $E(\delta_1) = 0$; $\text{Cov}(\xi, \delta_1) = 0$ 。 (附 4.1)

记 ξ_1 的均值为 $K_1 = E(\xi_1)$; x_1 的均值为 $\mu_{x_1} = E(x_1)$ 。则 x_1 的均值与 ξ_1 的均值, 二者之间关系如下:

$$E(x_1) = E(V_1 + \lambda_{11}\xi_1 + \delta_1)$$

$$\mu_{x_1} = V_1 + \lambda_{11}K_1$$

μ_{x_1} 与 K_1 之间的关系取决于 V_1 和 λ_{11} 。若计量单位相同, 如均为 cm, 则可令 $V_1 = 0$, $\lambda_{11} = 1$; 若计量单位不同, ξ_1 为英寸, x_1 为 cm, 则可令 $V_1 = 0$, 经过计量单位换算, 得到 $\lambda_{11} = 2.54$ 。

这表明, 对于一个可测变量 (指标) 测量一个潜变量时, 可以规定 $V_1 = 0$, $\lambda_{11} = 1$, 则 $\mu_{x_1} = K_1$, 即可测变量的均值等于潜变量的均值。



〔附例 2〕 两个可测变量测量一个潜变量。

分析：如 ξ_1 为员工的业绩； x_1 为每周工作时间的公司记录； x_2 为每周工作时间的自我记录。写出 x_1 、 x_2 以及 ξ_1 之间的关系式，如（附 4.2）式和（附 4.3）式。

$$x_1 = V_1 + \lambda_{11}\xi_1 + \delta_1 \quad (\text{附 4.2})$$

$$x_2 = V_2 + \lambda_{21}\xi_1 + \delta_2 \quad (\text{附 4.3})$$

可以规定 $V_1=0$ ， $\lambda_{11}=1$ ，但 V_2 不一定为 0， λ_{21} 也不一定为 1。

若 $V_1=0$ ， $\lambda_{11}=1$ ，则 $\bar{x}_1 = V_1 + \lambda_{11}K_1$ ，于是有 $\bar{x}_1 = K_1$ ， $K_1 = E(\xi_1)$ 。

而

$$\bar{x}_2 = E(V_2 + \lambda_{21}\xi_1 + \delta_2) = V_2 + \lambda_{21}E(\xi_1)$$

可能 $V_2 > 0$ ， $\lambda_{21} > 1$ ，结论： $\bar{x}_2 \neq K_1$ 。

用一个可测变量测量潜变量，均值可能相等；用两个可测变量估计潜变量， x_2 均值可能不等于潜变量均值。

2. 方差的结果

〔附例 3〕 用一个可测变量测量一个潜变量。

分析：与附例 1 类似，有

$$x_1 = V_1 + \lambda_{11}\xi_1 + \delta_1$$

可测变量 x_1 的样本均值用 \bar{x}_1 表示，它是 $E(x_1)$ 的无偏估计； K_1 是 ξ_1 的期望。则 $\bar{x}_1 = V_1 + \lambda_{11}K_1$ 。若 $V_1=0$ ， $\lambda_{11}=1$ ，可知， \bar{x}_1 是 K_1 的无偏估计。

如果无测量误差，则

$$\text{Var}(x_1) = \text{Cov}(x_1, x_1) = \lambda_{11}^2 \phi_1$$

其中， ϕ_1 是 ξ_1 的方差。

若有测量误差，则 $\text{Var}(x_1) = \lambda_{11}^2 \phi_1 + \text{Var}(\delta_1)$ 。只有当 $\lambda_{11}=1$ ， $\text{Var}(\delta_1)=0$ 时， $\text{Var}(x_1) = \phi_1$ 。当存在测量误差时，即使 $\lambda_{11}=1$ ，而 $\text{Var}(\delta_1) \neq 0$ ，有 $\text{Var}(x_1) = \phi_1 + \text{Var}(\delta_1)$ 。因为 $\text{Var}(\delta_1) > 0$ ，所以， $\text{Var}(x_1) > \phi_1$ 。

这表明，存在测量误差时，可测变量的方差大于潜变量的方差，即 $\text{Var}(x_1) > \phi_1$ 。



二、双变量和简单回归的情况

双变量是指有两个潜变量的情况，简单回归是两个潜变量之间为一元线性回归的情况。

1. 回归系数的结果

[附例 4] 对式 (附 4.4) 的情况进行分析。

$$x = \lambda_1 \xi + \delta, \quad y = \lambda_2 \eta + \epsilon, \quad \eta = \gamma \xi + \zeta \quad (\text{附 4.4})$$

$\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ 非零; $E(\delta) = 0, E(\epsilon) = 0, E(\zeta) = 0$; η, ξ 与 ζ 不相关。观测到 x, y 的值, 欲估计回归系数 γ 的值。

分析: 有两个潜变量 ξ 和 η ; x 和 y 分别测量变量 ξ 和 η 。讨论式 (附 4.4) 中, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的情况。若 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 可测变量存在测量误差时, 有 $x = \xi + \delta, y = \eta + \epsilon$ 。 ξ 和 η 的简单回归如式 (附 4.4), 为:

$$\eta = \gamma \xi + \zeta$$

可测变量 x 和 y 之间的简单回归为:

$$y = \gamma^* x + \zeta^* \quad (\text{附 4.5})$$

一般情况下, $\gamma^* \neq \gamma, \zeta^* \neq \zeta$, 利用 x, y 的协方差, 可以证明 $\gamma^* \neq \gamma$ 时, 可测变量与潜变量的关系。由式 (附 4.4) 可知

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = \text{Cov}(\xi, \gamma \xi + \zeta) = \gamma \Phi \quad (\text{附 4.6})$$

而

$$\text{Cov}(x, y) = \text{Cov}(\xi + \delta, \eta + \epsilon) = \text{Cov}(\xi + \delta, \gamma \xi + \epsilon + \zeta) = \gamma \Phi \quad (\text{附 4.7})$$

式 (附 4.6) 和式 (附 4.7) 表明, 可测变量的协方差等于潜变量的协方差。

根据式 (附 4.6), $\text{Cov}(\xi, \eta) = \gamma \Phi$, 可以得到 $\gamma = \frac{\text{Cov}(\xi, \eta)}{\Phi}$; 由式 (附 4.5), 可以推导出: $\gamma^* = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)}$, 根据式 (附 4.7), 可以进一步得到:

$$\gamma^* = \gamma \left[\frac{\Phi}{\text{Var}(x)} \right]$$

记 $\rho_{xx} = \frac{\Phi}{\text{Var}(x)}$, 为 x 的可靠系数, 则 $\gamma^* = \gamma \rho_{xx}$ 。若 $\rho_{xx} = 1$, 则有 $\gamma^* = \gamma$ 。



由一单变量情况方差的讨论可知，可测变量的方差 $\text{Var}(x)$ 大于潜变量的方差 Φ ，所以， ρ_{xx} 取值在 $0 \sim 1$ 之间，即 $0 < \rho_{xx} < 1$ 。故一般情况下， $\gamma^* < \gamma$ 。

这表明，可测变量存在测量误差时，可测变量的回归系数小于潜变量的回归系数。

2. 可靠系数的结果

这里主要比较可测变量可靠系数与潜变量可靠系数。

记 $\rho_{xx} = \frac{\Phi}{\text{Var}(x)}$ 为 x 的可靠系数； $\rho_{yy} = \frac{\text{Var}(\eta)}{\text{Var}(y)}$ 为 y 的可靠系数。定义潜变量 ξ 与 η 的相关平方 $\rho_{\xi\eta}^2$ 如式 (附 4.8)，可测变量 x 与 y 的相关平方 ρ_{xy}^2 如式 (附 4.9)。

$$\rho_{\xi\eta}^2 = \frac{[\text{Cov}(\xi, \eta)]^2}{\Phi \text{Var}(\eta)} = \frac{\gamma^2 \Phi}{\text{Var}(\eta)} \quad (\text{附 4.8})$$

$$\rho_{xy}^2 = \frac{[\text{Cov}(x, y)]^2}{\text{Var}(x) \text{Var}(y)} = \frac{\gamma^2 \Phi^2}{\text{Var}(x) \text{Var}(y)}$$

分子、分母同乘以 $\text{Var}(\eta)$ ，由于 $\rho_{xx} = \frac{\Phi}{\text{Var}(x)}$ ， $\rho_{yy} = \frac{\text{Var}(\eta)}{\text{Var}(y)}$ ，有

$$\rho_{xy}^2 = \rho_{xx} \cdot \frac{\gamma^2 \Phi}{\text{Var}(y)} \cdot \frac{\text{Var}(\eta)}{\text{Var}(\eta)} = \rho_{xx} \rho_{\xi\eta}^2 \cdot \rho_{yy} \quad (\text{附 4.9})$$

前面已经证明，当可测变量存在测量误差时，可测变量的方差大于潜变量的方差，即 $\text{Var}(x) > \Phi$ ， $\text{Var}(y) > \text{Var}(\eta)$ ，所以， $0 < \rho_{xx} < 1$ ， $0 < \rho_{yy} < 1$ ，代入式 (附 4.9) 可知， $\rho_{xy}^2 < \rho_{\xi\eta}^2$ 。

这表明，当可测变量存在测量误差时，可测变量的可靠系数小于潜变量的可靠系数。

3. 标准化相关系数的结果

由式 (附 4.9) 可以得到

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\rho_{xy}}{\sqrt{\rho_{xx} \rho_{yy}}} \quad (\text{附 4.10})$$

这是对随机测量误差进行适当修正的相关系数的标准式。若已知 ρ_{xy} ， ρ_{xx} ， ρ_{yy} ，则可以求出 $\rho_{\xi\eta}$ 。

根据式 (附 4.10) 可知，当可测变量存在测量误差时，可测变量的标准化相关系数 ρ_{xy} 小于潜变量标准化相关系数 $\rho_{\xi\eta}$ ；当 $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 1$ 时，可测变量



的标准化相关系数 ρ_{xy} 等于潜变量标准化相关系数 $\rho_{\xi\eta}$ 。

4. 样本估计的结果

可测变量存在测量误差时, 样本估计会有什么是需要关注的。

利用样本估计总体协方差, 如式 (附 4.11)。

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N-1} \quad (\text{附 4.11})$$

由式 (附 4.5) 知, 可测变量样本回归系数 γ^* 的估计值为:

$$\hat{\gamma}^* = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} \quad (\text{附 4.12})$$

由于 $\text{Cov}(x, y) = \gamma\Phi$, 考察 $\hat{\gamma}^*$ 是否为式 (附 4.4) 中潜变量回归系数 γ 的一致估计, 有

$$\text{plim } \hat{\gamma}^* = \text{plim} \left[\frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} \right] = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} = \frac{\gamma\Phi}{\text{Var}(x)} = \gamma\rho_{xx} \quad (\text{附 4.13})$$

式 (附 4.13) 中, ρ_{xx} 取值在 0~1 之间, 故 $\hat{\gamma}^*$ 不依概率收敛于 γ , $\hat{\gamma}^*$ 不是 γ 的一致估计。

这表明, 可测变量带有测量误差时, 可测变量样本回归系数估计值 γ^* 不是 γ 的一致估计。

考察相关平方样本估计的一致性, 有

$$\begin{aligned} \text{plim}(\hat{\rho}_{xy}^2) &= \text{plim} \frac{[\text{Cov}(x, y)]^2}{\text{Var}(x)\text{Var}(y)} \\ &= \frac{[\text{Cov}(x, y)]^2}{\text{Var}(x)\text{Var}(y)} \quad [\text{见式(附 4.9)}] \\ &= \rho_{xx}\rho_{yy}\rho_{\xi\eta}^2 \end{aligned} \quad (\text{附 4.14})$$

式 (附 4.14) 表明, 可测变量带有随机测量误差时, $\hat{\rho}_{xy}^2$ 不是 $\rho_{\xi\eta}^2$ 的一致估计。

5. 结论

从前面的讨论, 可以得到双变量和简单回归情况下的结论。

(1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 可测变量的协方差等于相应潜变量的协方差。



(2) 可测变量回归系数小于潜变量回归系数。

$\gamma^* = \rho_{xx}\gamma$; 由于 $0 < \rho_{xx} < 1$, 所以 $\gamma^* < \gamma$; 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 则 $\gamma^* = \rho_{xx}\gamma$;
若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 由于 $\gamma^* = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}x}$, 则 $\gamma^* = \gamma\rho_{xx}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$ 。

(3) 可测变量间的相关平方小于潜变量间相关的平方。

由于 $\rho_{xy}^2 = \rho_{xx}\rho_{yy}\rho_{\eta\gamma}^2$, 而 ρ_{xx} 和 ρ_{yy} 通常小于 1, 因而有这一结论。

由上可知, 一般情况下, 可测变量带有随机测量误差时, 可测变量的关系不能推断潜变量的关系。

三、多元回归情况

1. 总体的结果

如果潜变量的实际模型如式 (附 4.15)

$$\eta = \Gamma\xi + \zeta \quad (\text{附 4.15})$$

其中, $\text{Cov}(\xi, \zeta) = 0$, $E(\zeta) = 0$ 。

可测变量的估计模型如式 (附 4.16)

$$Y = \Gamma^* X + \zeta^* \quad (\text{附 4.16})$$

若 $\Lambda_x = 1$, 则 $X = \xi + \delta$, $\text{Cov}(\delta, \xi) = 0$; $\Lambda_y = 1$, 则 $Y = \eta + \epsilon$, $\text{Cov}(\epsilon, \eta) = 0$ 。

对于式 (附 4.15) 和式 (附 4.16), 关心的是潜变量 Γ 与可测变量 Γ^* 之间的关系。当可测变量带有测量误差时, 会有什么影响。

记外生潜变量 ξ 的协方差阵为 Φ ; ξ 与 η' 的协方差阵为 $\Sigma_{\xi\eta'}$, 则

$$\Sigma_{\xi\eta'} = \text{Cov}(\xi, \eta') = \text{Cov}(\xi, \xi'\Gamma' + \zeta') \quad (\text{附 4.17a})$$

由于 $\text{Cov}(\zeta, \xi) = 0$, 式 (附 4.17a) 可以写成

$$\Sigma_{\xi\eta'} = \Phi\Gamma' \quad (\text{附 4.17b})$$

由式 (附 4.17b) 可以得到

$$\Gamma' = \Phi^{-1}\Sigma_{\xi\eta'} \quad (\text{附 4.18})$$

仿照上面的结果可以得到

$$\Gamma^{*'} = \Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy'} \quad (\text{附 4.19})$$



讨论式(附 4.18)和式(附 4.19)中的 Γ 与 Γ^* 是否可能相等。由于

$$\begin{aligned}\Sigma_{XY'} &= \text{Cov}(X, Y') = \text{Cov}(X, \eta' + \varepsilon') \\ &= \text{Cov}(X, \eta') = \text{Cov}(X, \xi' \Gamma' + \zeta') \\ &= \Sigma_{X\xi'} \Gamma'\end{aligned}\quad (\text{附 4.20})$$

将式(附 4.20)的结果代入式(附 4.19), 得到式(附 4.21)。

$$\Gamma^{*'} = \Sigma_{XX'}^{-1} \cdot \Sigma_{X\xi'} \cdot \Gamma' \quad (\text{附 4.21})$$

由式(附 4.21)知, $\Gamma^{*'}$ 与 Γ' 相等, 取决于 $\Sigma_{XX'}^{-1} \cdot \Sigma_{X\xi'}$ 。只有当 X 和 ξ 相等, 没有测量误差时, 即 $\Sigma_{XX'}^{-1} \cdot \Sigma_{X\xi'} = 1$ 时, 才有 $\Gamma^{*'} = \Gamma'$; 若有测量误差, $\Gamma^{*'}$ 和 Γ' 的关系取决于 X 和 ξ 的关系。

2. 样本估计的结果

利用样本数据进行估计时, 也有与总体类似的结果。根据前面的模型及总体的情况, 当 ξ 服从正态分布时, 采用最大似然估计, 可以有样本估计结果, 如式(附 4.22)。

$$\hat{\Gamma}' = \hat{\Phi}^{-1} S_{\xi\eta'} \quad (\text{附 4.22})$$

式中, $S_{\xi\eta'}$ 是样本协方差。

大样本情况下, $\text{plim } \hat{\Phi}^{-1} S_{\xi\eta'}$ 依概率收敛于 $\Phi^{-1} \Sigma_{\xi\eta'}$, 所以 $\hat{\Gamma}'$ 是 Γ' 的一致估计。在 X, Y 有测量误差的情况下, 结构系数的最小二乘估计(OLS)为:

$$\hat{\Gamma}^{*'} = S_{XX'}^{-1} S_{XY'} \quad (\text{附 4.23})$$

由前面的总体关系可知, 以样本协方差替代总体协方差, 可以得到 $\hat{\Gamma}^{*'}$ 是 $\Sigma_{XX'}^{-1} \Sigma_{X\xi'} \Gamma'$ 的一致估计, 而不是 Γ' 的一致估计。

[附例 5] 死亡率和空气污染等的关系。^①

分析: 记 η 为死亡率。考虑对死亡率影响的有七个因素: ξ_1 为硫酸盐污染物; ξ_2 为颗粒污染物; ξ_3 为人口密度; ξ_4 为 65 岁以上老年人口比重(%) ; ξ_5 为非白人人口比重(%) ; ξ_6 为收入在贫困线以下家庭所占比

^① Kenneth A. Bollen: *Structural Equations with Latent Variables*, John Wiley & Song, 1989, p. 163.



重 (%)； ξ_7 为人口的自然对数。

令 $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$, $x_4 = \xi_4$, $x_5 = \xi_5$, $x_6 = \xi_6$, $x_7 = \xi_7$, 考察其余变量均无测量误差情况下, x_1 的可靠性变动, 对回归系数估计的影响。采集 108 个地区的数据。附表 4—1 是估计的结果。

附表 4—1 x_1 变动回归系数估计的结果 ($N=108$)

x_1 的可靠性变动	回归系数							
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	R^2
1.0	0.107	0.090	0.064	1.008	0.370	-0.063	-0.076	0.839
0.9	0.123	0.086	0.060	1.003	0.369	-0.062	-0.072	0.840
0.7	0.173	0.072	0.047	0.986	0.363	-0.056	-0.056	0.845
0.5	0.291	0.039	0.017	0.947	0.350	-0.044	-0.020	0.855

表中第一行是 x_1 无测量误差即 $\rho_{x_1 x_1} = 1$ 时的结果。从表可以看出, 有无测量误差回归系数估计结果存在差异。当 x_1 不存在测量误差时, ξ_1 的系数 $\hat{\gamma}_1^*$ 是 0.107, 当 x_1 存在测量误差, $\rho_{x_1 x_1} = 0.5$ 时, ξ_1 的系数 $\hat{\gamma}_1$ 是 0.291, 显然, $\hat{\gamma}_1^* \neq \hat{\gamma}_1$ 。附表 4—1 还显示当 x_1 有测量误差时, $\hat{\gamma}_i^* (i=2, 3, \dots, 7)$ 都不等于 $\hat{\gamma}_i$ 。如 x_1 存在测量误差, $\rho_{x_1 x_1} = 0.5$ 时, ξ_2 的系数 $\hat{\gamma}_2$ 是 0.039, 而不是 $\rho_{x_1 x_1} = 1$ 时的 0.090。这表明, x_1 存在测量误差, 不仅影响 ξ_1 系数的估计值, 还影响 $\xi_2 \sim \xi_7$ 系数的估计值。可测变量存在测量误差影响参数估计的结果。

四、多方程系统的情况

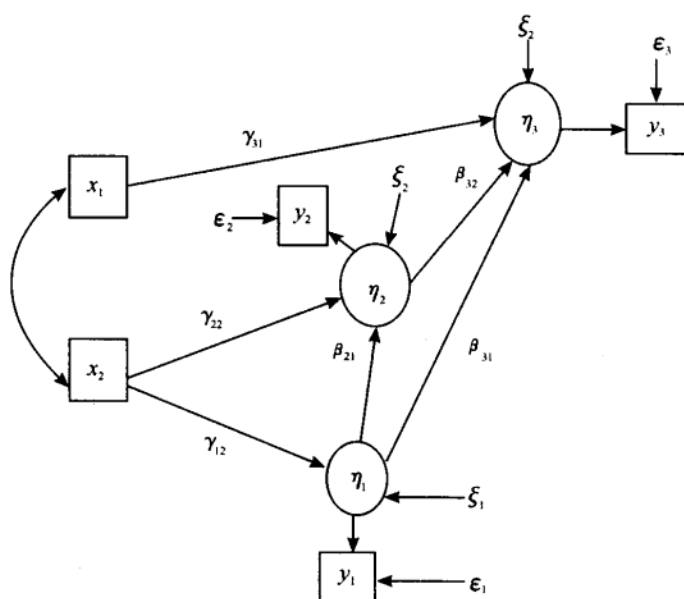
1. 可靠性已知

可靠性已知是指可靠系数可以得到。

【附例 6】 如例 3.7 观点一致性的分析。^①

分析: 外生变量: x_1 为厂龄, x_2 为年龄; 内生变量: η_1 为尊重, η_2 为行动, η_3 为观点一致; 其相应的观测变量分别记为 y_1, y_2, y_3 。若已知变量 y_1 可靠性系数 $\rho_1 = 0.57$, 变量 y_2 可靠系数 $\rho_2 = 0.77$, 变量 y_3 可靠系数 $\rho_3 = 0.84$, 且 y_1, y_2, y_3 带有测量误差, 其路径图如附图 4—1。

^① Kenneth A. Bollen: *Structural Equations with Latent Variables*, John Wiley & Sons, 1989, p. 169.



附图 4—1 带有测量误差的观点一致性模型

附表 4—2 给出附图 4—1 模型的最大似然估计 (ML) 和非加权最小二乘估计 (ULS) 的结果。

附表 4—2 观点性一致模型估计结果

参数	ML 估计		ULS 估计	
	(1)	(2)	(3)	(4)
γ_{12}	-0.087 (0.019)	-0.087 (0.019)	-0.087	-0.087
γ_{22}	0.058 (0.016)	0.034 (0.019)	0.058	0.034
γ_{31}	0.860 (0.340)	0.707 (0.346)	1.332	0.585
β_{21}	-0.285 (0.062)	-0.554 (0.132)	-0.284	-0.556
β_{31}	-0.218 (0.097)	-0.219 (0.237)	-0.192	-0.202
β_{32}	0.850 (0.112)	1.113 (0.214)	0.846	1.113



续前表

参数	ML 估计		ULS 估计	
	(1)	(2)	(3)	(4)
ψ_{11}	12.961 (1.398)	6.695 (1.397)	12.959	6.689
ψ_{22}	8.489 (0.915)	4.971 (1.017)	8.475	4.977
ψ_{33}	19.454 (2.098)	11.687 (2.169)	18.838	11.820
ϕ_{11}	1.021 (0.110)	1.021 (0.110)	0.774	1.130
ϕ_{21}	7.139 (1.256)	7.139 (1.256)	7.139	7.135
ϕ_{22}	215.662 (23.255)	215.662 (23.255)	215.663	215.662
$\text{Var}(\epsilon_1)$	0.0 ^c	6.285 ^c	0.0 ^c	6.285 ^c
$\text{Var}(\epsilon_2)$	0.0 ^c	2.534 ^c	0.0 ^c	2.534 ^c
$\text{Var}(\epsilon_3)$	0.0 ^c	5.115 ^c	0.0 ^c	5.115 ^c
$R^2_{\eta_1}$	0.113	0.197	0.113	0.197
$R^2_{\eta_2}$	0.229	0.145	0.229	0.416
$R^2_{\eta_3}$	0.390	0.564	0.410	0.560
测定系数 R^2	0.205	0.258	0.229	0.253

注：c 表示约束的参数。

表中第 (1) 列和第 (3) 列为无测量误差，第 (2) 列和第 (4) 列有测量误差。有测量误差时， $R^2_{\eta_1}$ ， $R^2_{\eta_2}$ ， $R^2_{\eta_3}$ 以及 R^2 不同；注意系数的变化，如 $\hat{\beta}_{32}$ 的值从 0.85 到 1.113， $\hat{\gamma}_{22}$ 从 0.058 到 0.034，可以看到，可测变量带有测量误差，会影响参数估计的结果。

2. 可靠性未知，误差项的方差可求

[附例 7] 对附图 4—2 的分析。

分析：由附图 4—2，可以写出方程，如式 (附 4.24)。

$$y_1 = \eta_1 + \epsilon_1$$

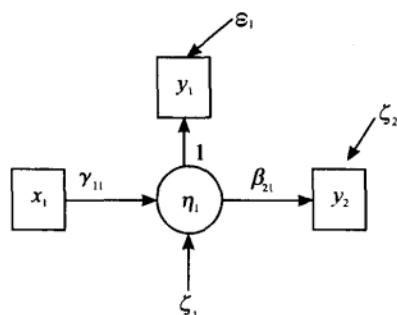
$$y_2 = \beta_{21} \eta_1 + \zeta_2$$

$$\eta_1 = \gamma_{11} x_1 + \zeta_1$$

(附 4.24)



其中, 误差彼此不相关, 与 x_1 也不相关。 y_1 与 η_1 之间的系数限定为 1, 可测变量 y_1 带有测量误差 ϵ_1 , ϵ_1 的方差希望可以估计出来。



附图 4—2 一个模型路径图

根据

$$\Sigma = \Sigma(\theta)$$

有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \text{Var}(y_1) \\ \text{Cov}(y_1, y_2) & \text{Var}(y_2) \\ \text{Cov}(x_1, y_1) & \text{Cov}(x_1, y_2) & \text{Var}(x_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{11}^2 \phi_{11} + \psi_{11} + \text{Var}(\epsilon_1) & & \\ \beta_{21} \gamma_{11}^2 \phi_{11} + \beta_{21} \psi_{11} & \beta_{21}^2 \gamma_{11}^2 \phi_{11} + \beta_{21}^2 \psi_{11} + \psi_{22} & \\ \gamma_{11} \phi_{11} & \beta_{21} \gamma_{11} \phi_{11} & \phi_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{附 4.25}) \end{aligned}$$

式中, ψ_{11} , ψ_{22} 分别是 ζ_1 和 ζ_2 的方差。

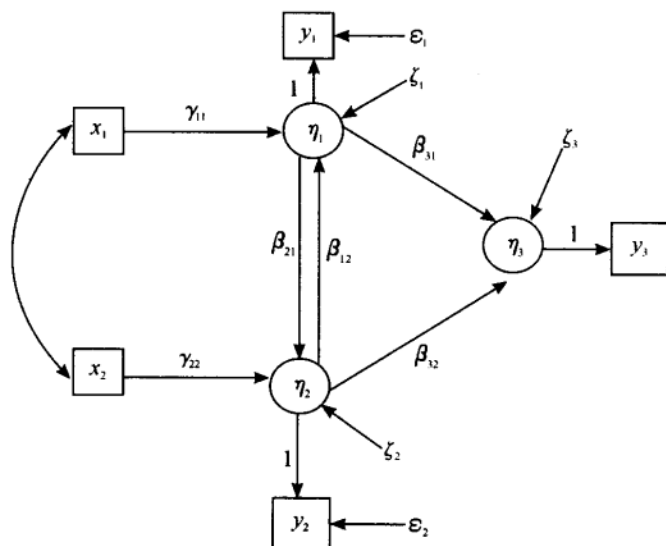
式 (附 4.25) 中, 可测变量 x_1 , y_1 , y_2 可以组成 6 个 $\left[\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) = \frac{1}{2}(1+2)(1+2+1) \right]$ 方程。待估计参数有 γ_{11} , β_{21} , ϕ_{11} , ψ_{11} , ψ_{22} , $\text{Var}(\epsilon_1)$ 等 6 个参数。由于 $t = \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) = 6$, 参数可以求出。由 $\text{Var}(x_1) = \phi_{11}$, 可以求出 ϕ_{11} ; 由 $\text{Cov}(x_1, y_1) = \gamma_{11} \phi_{11}$ 可以求出 γ_{11} ; 由 $\text{Cov}(x_1, y_2) = \beta_{21} \gamma_{11} \phi_{11}$, 可以计算得到 β_{21} ; 再由 $\text{Cov}(y_1, y_2) = \beta_{21} \gamma_{11}^2 \phi_{11} + \beta_{21} \psi_{11}$ 能够得到 ψ_{11} ; 利用 $\text{Var}(y_1) = \gamma_{11}^2 \phi_{11} + \psi_{11} + \text{Var}(\epsilon_1)$ 就计算得到 $\text{Var}(\epsilon_1)$ 。因此, 误差项的方差 $\text{Var}(\epsilon_1)$ 可以求出。



3. 可靠性未知，误差项方差不可求

[附例 8] 主客观社会地位分析。^①

分析：有关变量的关系如附图 4—3。其中， x_1 是实际收入， x_2 是实际职业声望， y_1 是主观对收入的评价， y_2 是主观对职业声望的评价， y_3 是主观对社会地位的评价， η_1 是个人收入， η_2 是个人职业声望， η_3 是个人社会地位。



附图 4—3 主客观社会地位路径图

这里 $\hat{\phi}_{ii} \neq 0$ ($i=1, 2, 3$)， y_3 没有测量误差，但 y_1, y_2 允许有测量误差；若约束 $\text{Var}(\epsilon_1) = \text{Var}(\epsilon_2) = 0$ ，即 y_1, y_2 无测量误差，得到用最大似然估计 (ML) 和非加权最小二乘估计 (ULS) 的结果，如附表 4—3 所示。

附表 4—3

附图 4—3 模型估计结果

参数	ML 估计		ULS 估计	
	(1)	(2)	(3)	(4)
β_{21}	0.24 (0.10)	0.33 (0.00)	0.23	0.30

^① Kenneth A. Bollen: "Structural Equations with Latent Variables", John Wiley & Sons, 1989, p. 173.



续前表

参数	ML 估计		ULS 估计	
	(1)	(2)	(3)	(4)
β_{12}	0.12 (0.11)	0.29 (0.17)	0.22	0.25
β_{31}	0.41 (0.04)	0.40 (0.14)	0.40	0.42
β_{32}	0.26 (0.04)	0.54 (0.20)	0.55	0.55
γ_{11}	0.11 (0.11)	0.10 (0.02)	0.11	0.10
γ_{22}	0.007 (0.001)	0.007 (0.001)	0.007	0.007
ϕ_{11}	4.83 (0.33)	4.83 (0.33)	4.83	4.83
ϕ_{21}	13.65 (2.34)	13.66 (2.35)	13.66	13.66
ϕ_{22}	452.71 (30.84)	452.71 (30.84)	452.71	452.71
ψ_{11}	0.36 (0.03)	0.22 (0.08)	0.29	0.23
ψ_{22}	0.33 (0.02)	0.11 (0.05)	0.24	0.12
ψ_{33}	0.26 (0.02)	0.21 (0.02)	0.16	0.20
$\text{Var}(\epsilon_1)$	0.0 ^c (—)	0.10 (0.06)	0.0 ^c	0.10
$\text{Var}(\epsilon_2)$	0.0 ^c (—)	0.21 (0.05)	0.0 ^c	0.21
$R_{\eta_1}^2$	0.21	0.52	0.29	0.48
$R_{\eta_2}^2$	0.18	0.73	0.25	0.71
$R_{\eta_3}^2$	0.34	0.47	0.60	0.49
可决系数 R^2	0.24	0.88	0.32	0.86

注：c 表示约束的参数。

附表 4—3 中，第 (1)，(3) 列无测量误差，第 (2)，(4) 列有测量误差。从表可以看到，考虑测量误差时，最大似然估计与非加权最小二乘估计的结果不同。 β 系数中，除 β_{31} 的差异不大，其余均有很大不同； ψ 值有明显不同，ML 估计结果，有测量误差的 ψ 值明显减小；考虑测量误差时， $R_{\eta_1}^2$ ，



$R^2_{\eta_2}$ 和 $R^2_{\eta_3}$ 都有增大，可决系数 R^2 明显增大，说明可测变量带有测量误差时，考虑这些误差，会大大提高模型的拟合效果。

上述分析表明，当可测变量有测量误差时，必须考虑测量误差。否则，将会导致估计结果的差异。





• 第五章 •

模型评价

结构方程模型应用时主要有三种类型。第一，纯验证型。这是根据相关理论，建立一个单一的模型，利用采集的数据验证假设模型。其目的在于考虑拒绝或接受该模型。第二，替代或竞争型。这是根据相关理论提出多个假设模型，利用采集的数据考察这些模型。其目的在于从中选择较好的模型。第三，模型发展型。这是根据相关理论提出一初始模型，利用采集的数据检验模型的适用性。其目的在于找出理论上和统计上最适合的模型。

无论是哪一种类型的应用，结构方程模型建立后都必须进行评价，才能达到其应用的目的。

第一节 参数检验

结构方程模型与其他统计模型一样，模型参数估计后，需要对模型进行检验和评价。对结构方程模型的评价通常包括三个方面：参数检验、拟合程度检验和解释能力评价。参数检验是模型评价的第一步。只有该检验通过，才能进行另外两项的评价。

模型参数的检验主要是进行参数的显著性检验和参数的合理性检验，以评价参数的意义以及合理性。参数估计过程中所有待估计的参数均需进行



检验。

一、参数的显著性检验

结构方程模型的参数显著性检验，类似于回归模型中参数的显著性检验，即参数的 t 检验。对每一个估计的参数建立原假设： H_0 ，参数等于零。检验采用 t 统计量：它由参数的估计值除以相应的标准误（或渐近标准误）得到。检验标准与回归中 t 检验一样。一般来说， t 的绝对值大于 2，拒绝 H_0 ，检验通过，表明参数显著不为零，则假设模型中对该参数进行自由估计是合理的；若不能拒绝 H_0 ，表明该参数与零没有显著差异，可以从模型中剔除。这时需要修正模型重新估计。

在结构方程模型中检验的参数是所有需要估计的参数。如在全模型中，八个矩阵 $B, \Gamma, \Lambda_y, \Lambda_x, \Phi, \Psi, \Theta_e, \Theta_s$ 的所有元素都应进行显著性检验。

【例 5.1】大学生工作预期模型的参数显著性检验。

分析：依据例 4.1 建立的结构模型，利用获得的 331 份问卷的数据，对两个参数做限定后运用 Amos4.0 软件，得到潜变量之间的路径系数估计值和相应的检验值，如表 5—1 所示。

表 5—1 路径系数估计值及相应检验值

路径	估计值	标准差	C. R.	P
$\eta_1 \leftarrow \xi_1$	0.782	0.236	3.318	0.001
$\eta_1 \leftarrow \eta_2$	0.677	0.092	7.369	0.000
$\eta_1 \leftarrow \eta_3$	0.200	0.147	1.361	0.174
$\eta_1 \leftarrow \xi_2$	0.507	0.001	5.66	0.000
$\eta_2 \leftarrow \xi_1$	0.191	0.275	0.695	0.487
$\eta_2 \leftarrow \eta_3$	0.448	0.072	6.208	0.000
$\eta_3 \leftarrow \xi_2$	0.499	0.001	5.460	0.000

在 Amos 中，C. R. 是参数显著性检验的统计量， P 是原假设：参数为零成立的概率。可以看出，个人特征（ η_3 ）与工作期望（ η_1 ）的路径系数显著性检验未通过，因为其为零的概率大于 0.05；学校背景（ ξ_1 ）与个人能力（ η_2 ）的路径系数显著性检验也未通过。在模型修正时可以借助这一检验考虑路径的删除。但一般不会同时删除两个，通常先删除参数为零的概率较大者，同时要结合参数的实际意义考虑。如果参数反映的潜变量之间关系确有意义，则应慎重，最好检查数据有无缺失或可测变量是否适当等。



参数的显著性检验对模型所有估计的参数都要进行,若检验没有通过,一定要分析查找原因,以便于对模型进行合理修正。

二、参数的合理性检验

参数的合理性是指得到的参数估计值有合理的实际意义。检验参数的合理,就是检验参数估计值是否恰当。这一检验包括,参数的符号是否符合理论假设,如估计的方差、标准误差是否为正;因子之间是正的影响关系、而估计得出的参数为负;参数的取值范围是否合理,如没有互通的路径系数是否为零,相关系数是否在 $-1 \sim 1$ 之间,标准化系数是否超过或太接近于1等;参数是否可以得到合理解释,如参数与假设模型的关系有无矛盾等。如果有不合理的,需要对模型进行修正。

【例 5.2】大学生工作预期模型参数合理性检验。

分析:在例 5.1 对参数估计的过程中,模型没有考虑各可测变量误差项之间的相关性。如果考虑个人能力(η_p)和个人特征(η_p)的各个可测变量之间有相关性,则各误差项之间应假设相关,参数估计结果, GPA(y_4)与性格是否开朗(y_8)之间的相关系数为负,很难加以解释;可测变量 y_7 (交往能力)误差项的方差为负,不合理。结果表明,模型的假设有问题。

第二节 模型整体评价

一、残差测量

结构方程模型参数估计的基本出发点如式 (5.1)。

$$\Sigma = \Sigma(\theta) \quad (5.1)$$

以样本方差—协方差矩阵 S 替代 Σ ;以参数 θ 的估计值 $\hat{\theta}$ 替代 θ ,即以 $\Sigma(\hat{\theta})$ 替代 $\Sigma(\theta)$,实际是依据图 5—1 的关系作的近似。

$\Sigma(\theta)$ 是假设模型隐含的总体协方差矩阵。若假设的模型正确,则 $\Sigma = \Sigma(\theta)$,即 $\Sigma - \Sigma(\theta) = 0$ 。 $\Sigma - \Sigma(\theta)$ 得到的残差矩阵,反映假设模型在多大程度上接近于真实模型。在大样本情况下, S 收敛于 Σ , $\Sigma(\hat{\theta})$ 收敛于 $\Sigma(\theta)$ 。因此,可以以 S 估计 Σ , $\Sigma(\hat{\theta})$ 估计 $\Sigma(\theta)$ 。

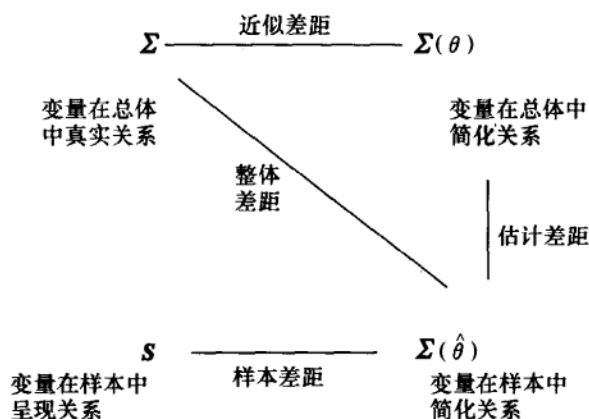


图 5-1 协方差矩阵关系示意图

1. 样本残差的影响因素

残差矩阵 $S - \Sigma(\hat{\theta})$ 是样本残差矩阵，衡量假设模型与真实模型的接近程度。 S 与 $\Sigma(\hat{\theta})$ 的差值越小，表明假设模型与真实模型越接近，假设模型越合理，或说拟合效果越好。

记： $S = (S_{ij})$ ， $\Sigma(\hat{\theta}) = (\hat{\sigma}_{ij})$ ；所有可测变量，包括外生变量和内生变量均记作 x ，则 $S_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}$ 就是 x_i 与 x_j 协方差的样本残差。若 $S_{ij} - \hat{\sigma}_{ij} > 0$ ，则模型低估了 x_i 与 x_j 的协方差；若 $S_{ij} - \hat{\sigma}_{ij} < 0$ ，则模型高估了 x_i 与 x_j 的协方差。

影响样本残差的因素主要有下面三个：

- (1) 模型设定。假设模型与真实模型的差距较大，使得样本残差过大。
- (2) 样本容量。由于样本容量确定不合适，导致抽样误差过大。可以考虑增加一定数量的样本，减小误差。
- (3) 指标的测量单位。由于指标的测量单位不同，会导致样本残差计算的不正确。考察这一点时，可以计算相关系数的残差 $|r_{ij} - \hat{r}_{ij}|$ ，其中 r_{ij} 为样本相关系数； $\hat{r}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} / \sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}$ ， $\hat{\sigma}_{ij}$ 是由假设模型得到。理论上， $|r_{ij}| \leq 1$ ， $|\hat{r}_{ij}| \leq 1$ ，最差的情况是 r_{ij} 与 \hat{r}_{ij} 完全相反，一个为 +1，另一个为 -1，所以有 $|r_{ij} - \hat{r}_{ij}| \leq 2$ 。相关系数的残差越接近于零，表明这一影响越小。为避免测量单位的影响，通常都将可测变量测量结果进行标准化处理。

注意模型评价时，若为比较几个模型，则 (2)，(3) 影响不存在；若为独立评价某一个模型，则 (2)，(3) 需考虑。



2. 均方根残差

均方根残差 (root mean-square residual, RMR) 是 Joreskog 和 Sorbom 于 1986 年提出的。其利用样本残差计算, 数值越小, 表明模型拟合效果越好。

RMR 的计算公式如式 (5.2)。

$$\text{RMR} = \left[2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^i \frac{(S_{ij} - \hat{\sigma}_{ij})^2}{q(q+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$

式中各符号意义同前, q 是可测变量的总个数, 包括内生变量和外生变量。

由式 (5.2) 可知, 该指标数值越小, 表明样本残差越小, 即假设模型与真实模型越接近。

3. 标准化残差

标准化残差 (normalized residual, NR) 是经过标准化处理后的残差, 无量纲, 因而不受测量单位的影响。其计算公式如式 (5.3)。

$$\text{NR} = \frac{S_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}}{[(\hat{\sigma}_{ii} \hat{\sigma}_{jj} + \hat{\sigma}_{ij}^2)/N]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.3)$$

式中各符号意义同前, N 为观测的样本总量。

当标准化残差的绝对值不超过 1.96 时, 可以认为总体残差接近于零。

4. 标准化残差均方根

标准化残差均方根 (standard root mean-square residual, SRMR) 是直接基于残差的绝对拟合指数, 计算公式如下。

$$\text{SRMR} = \left\{ 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^i (S_{ij} - \hat{\sigma}_{ij})^2 / (S_{ii} - S_{jj}) / [q(q+1)] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

式中, $S_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}$ 是 x_i 与 x_j 协方差的样本残差; S_{ii} 是 x_i 样本方差; q 是可测变量数目, 包括外生变量和内生变量。前面的 RMR 下限为零, 但没有上限, 不便于进行模型判断。SRMR 利用相关矩阵进行分析, 避免了测量单位的影响。其取值在 0~1 之间。模型拟合越好, SRMR 越接近于零。一般认为, $\text{SRMR} > 0.08$, 模型拟合不好, $\text{SRMR} < 0.05$, 模型拟合效果可以接受。这一指标对误设模型较为敏感, 使用时应注意; 有时会受样本容量 N 的影响。

二、拟合评价的绝对指数

结构方程模型的整体评价, 一般通过计算拟合指数完成。拟合指数是拟



合优度 (goodness of fit) 统计量的简称。它是通过构造统计量, 衡量 $S - \Sigma(\hat{\theta})$ 的差距, 比较观察到的协方差与期望协方差之间的差异, 评价和测量模型的绝对拟合程度。

1. χ^2 检验

模型整体评价的最基本指标是 χ^2 检验。对于所建立的假设

$$H_0: \Sigma = \Sigma(\theta)$$

$$H_1: \Sigma \neq \Sigma(\theta)$$

H_0 为真时, 有

$$\chi^2 = (N-1) \min |F| \sim \chi^2(1/2(q(q+1)) - k) \quad (5.5)$$

式中, N 是样本容量; $|F|$ 是模型拟合函数估计值, 可以是 F_{ML} 或 F_{GLS} ; q 是可测变量的个数, 包括外生和内生; k 为 θ 中包含的模型参数的数目, 即自由参数的个数。

若观测数据的总体服从多元正态分布, 并且模型定义正确, 则统计量渐近服从自由度为 $[1/2(q(q+1)) - k]$ 的 χ^2 分布。一般来说, χ^2 值越小, S 与 $\Sigma(\hat{\theta})$ 的差异越小, 表明模型拟合的效果越好。因而通常希望得到不显著的 χ^2 值, 这种情况下, 不能拒绝 H_0 , 即不能拒绝所定义的模型。若 p 是 H_0 为真的概率, 当然希望 p 越大越好, 一般至少大于 0.1 或 0.2。

由式 (5.5) 知, 该检验受样本容量的影响, 因为检验统计量是用样本数乘以 $|F|$ 。在容量很小时, 几乎不拒绝所有拟合较差的模型; 而容量很大时, 又几乎拒绝所有拟合较优的模型。这一检验假定观测变量服从正态分布, 构造似然函数的对数, 有

$$\log L_0 = -\frac{N-1}{2} \{ \log |\hat{\Sigma}| + \text{tr}(\hat{\Sigma}^{-1}S) \}$$

$$\log L_1 = -\frac{N-1}{2} \{ \log |S| + \text{tr}(S^{-1}S) \}$$

$$= -\frac{N-1}{2} \{ \log |S| + q \}$$

式中, $(S^{-1}S)$ 是单位阵; $\text{tr}(S^{-1}S)$ 是单位阵 $(S^{-1}S)$ 的迹, 为 q 。

得到似然比

$$-2 \log \left(\frac{L_1}{L_0} \right) = -2 (\log L_1 - \log L_0)$$



$$= (N-1)F_{ML} \sim \chi^2 \left(\frac{q}{2} (q+1) - k \right)$$

当可测变量不是正态时, χ^2 检验的结果不可靠。

该检验的适用条件:

(1) 观测变量 X 不是尖峰。若 X 不服从正态分布, 可以通过修正、转换, 使 X 变为正态分布; 若 X 无法转换为正态分布, 可以采用其他统计量。

(2) 协方差阵可计算。

(3) 样本量适当。由于 χ^2 受样本容量大小的影响, 较适合的样本容量为 100~200。

(4) 在 $H_0: \Sigma = \Sigma(\theta)$ 下运用。

增加自由参数, 会减小 χ^2 值, 提高模型的拟合程度, 但同时自由度也会较小。在比较两个嵌套模型时, 不适宜仅用 χ^2 值, 而用 χ^2/df 。其仍服从 χ^2 分布, 检验方法同前。

2. 近似误差均方根

近似误差均方根 (root mean square error of approximation, RMSEA) 是一种不需要有底线的测量模型拟合程度的绝对指数。其计算如式 (5.6)。

$$RMSEA = (\hat{F}_0/df)^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

式中

$$\hat{F}_0 = \max\{(\hat{F} - df)/(N-1), 0\}$$

\hat{F} 为模型拟合函数估计值, 通常取 χ^2 ; $(\hat{F} - df)$ 为离中参数; df 为自由度; N 为样本容量。

一般来说, RMSEA 低于 0.05, 表明模型与数据拟合很好, 理论模型可以接受; 在 0.05~0.08 之间, 可以认为拟合不错; 在 0.08~0.10 之间, 则认为拟合一般; 若大于 0.10, 模型拟合效果不能接受; 如果低于 0.01, 模型拟合非常好。由式 (5.6) 可以看出, RMSEA 受样本容量 N 的影响较小。它对错误模型比较敏感, 同时惩罚复杂模型, 是一个较为理想的用于模型评价的绝对拟合指数, 也可用于多个模型的比较筛选。

三、拟合评价的相对指数

对结构方程模型整体拟合程度的评价, 还可以通过计算相对拟合指数



完成。

1. 相对拟合指数构造的基本思想

结构方程模型在理论构建时，可以有几种类型：饱和模型、不饱和模型和独立模型。饱和模型是恰好识别的模型，是拟合最好的模型。不饱和模型是从饱和模型中删除若干路径得到的模型，从模型中删除哪条路径，往往参考路径系数的显著性，一般来说，不显著的可以考虑将其删除。独立模型是所有指标都假设不相关的模型，拟合独立模型得到的 χ^2 值比其他任何模型都大。

最开始构建的模型，称为假设（理论）模型，亦称定义模型或初始模型。若假设模型比独立模型拟合得好，则其 χ^2 值应减小，通过将假设模型与独立模型或基准模型 χ^2 值的比较得到的统计量，就是相对拟合指数，可以用于评价模型优劣。

下面介绍常用的相对拟合指数。

2. 标准拟合指数

标准拟合指数（normed fit index, NFI）的计算公式如式（5.7）。

$$NFI = \frac{\chi^2_I - \chi^2_M}{\chi^2_I} \quad (5.7)$$

式中， χ^2_I 是独立模型或基准模型 χ^2 值， χ^2_M 是假设模型 χ^2 值。

NFI 表示假设模型与独立模型或基准模型相比所减少的 χ^2 值比率。显然，减少的越多，表明假设模型相对于独立模型或基准模型能够更好地拟合数据；反之，则表明假设模型与独立模型或基准模型在拟合数据上没有太大差别，假设模型没有必要采用。

$NFI=0$ ，表示假设模型拟合与独立模型或基准模型相同； $NFI=0.96$ ，表示假设模型的拟合接近饱和模型，拟合效果不错。但 NFI 受样本容量的影响较大，故不是很理想的评价指数。

3. 非标准化拟合指数

非标准化拟合指数（non-normed fit index, NNFI）亦称 TLI（tucker-lewis index）。其计算公式如式（5.8）。

$$NNFI = \frac{\chi^2_I - \left(\frac{df_I}{df_M} \cdot \chi^2_M \right)}{\chi^2_I - df_I} \quad (5.8)$$

式中， χ^2_I 是独立模型或基准模型 χ^2 值； χ^2_M 是假设模型 χ^2 值； df_M 是假设模



型自由度； df_I 是独立模型或基准模型自由度； $NNFI > 0.9$ ，模型拟合较好，可以适用于嵌套模型。

4. 比较拟合指数

比较拟合指数 (comparative fit index, CFI) 由 Bentler (1990) 提出，其计算公式如式 (5.9)。

$$CFI = 1 - \left(\frac{\tau_M}{\tau_I} \right) \quad (5.9)$$

式中， $\tau_M = \max \{ \chi_M^2 - df_M, 0 \}$ ； $\tau_I = \max \{ (\chi_I^2 - df_I), 0 \}$ 。

CFI 通过规范，使得最低值为 0，最高值为 1，因此，其在 0~1 之间取值。CFI > 0.9，模型拟合较好。该指数的不足是没有惩罚复杂模型。

常用的拟合指数如表 5-2 所示。

表 5-2 常用拟合指数说明表

拟合指数	判定标准	数据非正态时能否很好估计	处理不同大小样本时是否稳定	评估模型的简约性	说明
卡方统计量 (χ^2)	$p > 0.05$	否	否	否	多组模型比较时特别有用，如嵌套模式、等同模式
调整卡方 (χ^2/df)	一般要求介于 1~2 之间	否	否	否	多组模型比较时特别有用，如嵌套模式、等同模式
均方根残差 RMSEA	< 0.08 < 0.05	不清楚	否	是	测量模型的绝对拟合，对参数多的模型加以惩罚
标准拟合指数 NIF	> 0.90 > 0.95 为好	一般低估	是	否	不同模型评价时精确稳定，比较嵌套模式特别有用
非标准化拟合指数 NNFI(TLI)	> 0.90 > 0.95	一般低估	不清楚	否	用最大似然估计评价较好，最小二乘较差，可以比较嵌套模型
比较拟合指数 (CFI)	> 0.9	一般低估	不清楚	否	用最大似然估计时评价较好，最小二乘较差，可以比较嵌套模型

评价模型时，应多个拟合指数结合应用。一般情况下，一个好的拟合指



数应该不受样本容量的影响、取值在某一范围。能够惩罚复杂模型。

5. 信息指数

信息指数中最常用的有 AIC, SC, BIC 等。AIC 的计算如式 (5.10), SC 的计算如式 (5.11), BIC 的计算如式 (5.12)。

$$AIC = \chi^2 + 2K \quad (5.10)$$

$$SC = \hat{F} + (K \ln(N))/N \quad (5.11)$$

$$BIC = \chi^2 + K \ln\{N[0.5q(q+1)]\} \quad (5.12)$$

其中, \hat{F} 是参数估计时拟合函数的估计值; χ^2 是 $(N-1)\hat{F}$; N 是样本容量; q 是可测变量个数, 包括内生变量和外生变量; K 是模型的自由参数个数。

AIC (akaike information criterion) 是用于比较不同模型拟合数据效果的一种信息指数。其数值越小, 表明模型拟合效果越好。SC (schwart criterion) 和 BIC (bayesian information criterion) 与 AIC 一样, 依赖于样本容量, 用于在多个模型中找出参数估计比较稳定的模型。

比较式 (5.10) 和式 (5.11) 可以看出, SC 比 AIC 更加关注对模型的简约, 即对加入过多的参数进行惩罚。通常在利用信息指数时, 都希望选 AIC, SC 最小的模型, 但往往两个指标的结果并不一致, N 较大时, SC 比 AIC 对参数增加的惩罚力度要大。因此, 除了利用信息指数提供的信息外, 还要更关注模型的解释。

第三节 模型解释能力的评价

测量方程和结构方程都有测定系数, 亦称可决系数 (类似回归方程中的 R^2)。可以根据测定系数的大小评价方程对数据的拟合程度。

一、单个方程解释力评价

计算第 i 个方程的测定系数, 如式 (5.13)。

$$R_{x_i}^2 = 1 - \frac{\Psi_{ii}}{\hat{\sigma}_{x_i}^2} \quad (5.13)$$

式中, Ψ_{ii} 是第 i 方程残差的方差; $\hat{\sigma}_{x_i}^2$ 是 x_i 的样本方差; x_i 是第 i 个可测变量, $i=1, \dots, q$, 包括内生和外生的可测变量。



$0 \leq R^2_{y_i} \leq 1$ 。 $R^2_{y_i}$ 越大, 说明该方程对数据的拟合程度越高。一般来说, 拟合程度越高, 说明方程对数据的解释能力越强。如果一个方程的测定系数过低, 表明该方程对数据解释力不强, 意义不大, 应考虑将其进行调整或删除。

二、整个模型解释力评价

对于整个结构方程模型也可以计算测定系数, 如式 (5.14)。

$$R^2 = 1 - \frac{|\Psi|}{|\Sigma_{xx}|} \quad (5.14)$$

式中, $|\Psi|$ 是 Ψ 的行列式, 用估计值计算; $|\Sigma_{xx}|$ 是 Σ_{xx} 的行列式, 用可测变量 X 的样本值计算得到, 包括内生和外生的可测变量。

由式 (5.14) 得知 $0 \leq R^2 \leq 1$, R^2 越接近于 1, 模型的解释力越强。

对于整个结构方程模型利用测定系数评价解释力有明显的不足。整体模型有多个方程时, 可能会出现 R^2 大于各个方程的可决系数。如 Ψ 对角线上有一个 0, 即使其值很大, $|\Psi|$ 也可能较小, 导致 R^2 较高。 R^2 与整个模型中包含的方程个数有关。不同模型包含的方程个数不一样, 影响了 R^2 在不同模型间的比较。整体模型的评价采用拟合指数较好, 不宜采用测定系数。

三、效应分解

事实上, 即使一个模型拟合了数据, 也不意味模型一定就好。模型是否合理还取决于所有的参数估计是否都能得到合理的解释、是否在合理的取值范围内, 特别是模型应能从理论上加以合理解释。结构方程模型可以同因果模型一样, 进行效应分解。一个潜变量对另一个潜变量的直接影响称为直接效应; 一个潜变量通过其他变量对另一个潜变量的影响为间接效应。效应分解的计算如表 5—3。

表 5—3

效应分解计算表

	$\xi \rightarrow \eta$	$\eta \rightarrow \eta$
直接效应	Γ	B
间接效应	$(I-B)^{-1}\Gamma - \Gamma$	$(I-B)^{-1} - I - B$
总效应	$(I-B)^{-1}\Gamma$	$(I-B)^{-1} - I$

利用效应, 结合路径系数, 可以对潜变量之间的结构关系作出说明, 这有助于对模型解释力的评价。



模型修正

第一节 模型修正的基本问题

一、模型修正的意义

结构方程模型主要是用来估计潜变量之间的关系，并用来验证所假设的模型是否与所提供的数据吻合。无论其应用属于哪种类型，纯验证型、替代或竞争型，还是模型发展型，在进行评价后，都可能会发现假设模型并不合适，因而会面临假设模型是否需要修正的问题。导致模型不合适的原因通常有两方面，一是结构的假定有误；二是有关分布的假定不满足。结构的假定有误可能是由于外部界定有误或内部界定有误。遗漏了一些可测变量或潜变量，导致外部界定有误；遗漏或错误假定测定模型和结构模型的路径，是内部界定有误。有关分布的假定不满足主要表现为不满足正态分布的假定；测量尺度不满足，一般要求至少为定距尺度；不是线性关系以及有缺失值等。当模型不合适是内部界定错误导致时，模型可以通过不断修正加以改进，其他原因导致的不合适则无法仅通过修正对模型改进，而需根据具体原因采取相应措施改进。本章讨论的模型修正，是基于已有的数据，探讨假设模型是



否需要修正, 如果需要并且可以修正, 应该在哪些方面修正以及如何修正。

通过模型修正的过程, 可以发现数据采集中的问题, 特别是量表设计的问题。模型修正的意义在于用所获得的数据考察依据相关理论提出的初始假设模型。如果假设模型偏离数据所揭示的情况, 则需要根据数据所反映的情况对初始模型进行修正, 不断重复这个过程, 直至得到一个与数据拟合较好而同时模型总体的实际意义、模型变量之间的实际意义和所得的参数都有合理解释的模型为止。主要参考的标准有:

(1) 结构方程模型所得的结果是适当的。主要是模型总的拟合指标较好, 各个参数的值和相关性等处在合理的范围之内, 没有出现某个方差的值为负的现象, 同时所提供的数据并不否决该模型等。

(2) 所得的模型总体的实际意义、模型变量之间的实际意义和所得的参数与实际的假设的关系是合理的。可能一开始对某些变量之间的关系没有充分认识或者不太确认, 用实际数据进行验证时, 会证实或者否决开始所假定的关系, 修正后的模型不能与开始根据实际意义所能够确认的关系相违背或者有矛盾。

(3) 参考多个不同的整体拟合指数, 如 TLI, RMSEA 和卡方值等进行判断是否符合所要求的判定的标准 (Hau, Cheng & Chung, 1996; MacCallum et al, 1996; Marsh, Balla & Hau, 1996)。

二、模型修正的基本原则

模型修正的整个过程, 主要涉及省俭原则和等同模式。

1. 省俭原则

省俭原则 (principle of parsimony) 是指当两个模型同样拟合数据时, 即拟合程度相差不大的情况下, 应取两个模型中较简单的模型。假设测量一个班 30 人的数学、物理和化学的考试成绩, 可能提出两个假设模型, 模型甲和模型乙。在甲模型中认为数学、物理和化学的综合能力可以通过一个潜变量理科能力揭示; 在乙模型中数学成绩是数学能力这个潜变量的可测变量, 物理和化学成绩两个可测变量测量理科能力这个潜变量, 且数学能力又是理科能力的影响因素。从模型的结构看, 模型甲要比模型乙简洁, 因为仅仅需要估计 3 个因子载荷, 即数学、物理和化学作为理科能力的因子载荷, 而乙模型不仅需要估计 3 个因子载荷, 还要估计数学能力对理科能力的路径系数。

由于对实际问题的认识不同, 会出现不同的假设模型。当两个模型采用的数据相同, 即样本协方差阵相同时, 若模型甲和模型乙的拟合程度接近,



模型修正所得到的标准基本相同，可以认为甲模型是一个更可取的模型。因为采用一个潜变量（理科能力）的简单模型，已经能够解释各个变量之间的关系且符合实际意义和开始的假设，从省俭的角度应该采用甲模型。

需要说明的是，应用省俭原则的前提是两个模型进行修正后所得到的拟合指数相近，如果不相近，或者差距很大，应该采用对数据拟合更好的模型，而暂且不考虑模型的简洁性。最终采用的模型应是用较少参数但符合实际意义，且能较好拟合数据的模型。

2. 等同模式

等同模式指采用其他方法表示各个潜变量之间的关系，也能得出基本相同的结果。如假设有一个样本数据集合，A，B，C，D 4 个模型都和原始数据的拟合程度相同，并且 A，B，C，D 这 4 个模型所包含的待估计参数也是相同的，就称作 A，B，C，D 这 4 个模型是等同模式，简单概括为，参数个数相同、拟合程度相同的模型是等同模式。

等同模式已经有一些研究成果。如 Brecker (1990) 分析过一个极简单仅包含三个潜变量的模型就有 15 个等同模式；MacCallum, Wegener, Uchino (1993) 指出一般的等同模式在其他的统计方法中也出现过。例如，在一个简单的回归分析中，用变量 A 预测 B，得到拟合指标 R^2 ，如果用 B 预测 A，也得到相同的拟合指标 R^2 。拟合指标相同，哪个模型更可取，仅仅从统计中得不出结果，需要从变量的实际意义进行分析。MacCallum 等人 (1993) 也分析过如何对待和处理等同模式；目前的研究更多是从学术角度进行分析，不具有操作性。有兴趣的读者，可以关注该方面的研究成果。

处理等同模式主要可以采用两种方法，一是实际意义；二是多次验证。

(1) 实际意义是选择模型的重要基础和出发点。在逐个分析模型时，应该首先从实际意义判断模型的合理性。比如在关于学生成绩的研究中，性别、家庭的经济收入、父母的学历、家庭的和睦程度等相关，如果有家庭住房条件加入，就需要从常理和实际意义考虑，家庭住房可能没有家庭收入更能反映家庭经济状况。一个拟合再好，但没有实际意义，无法对现象作出很好解释的模型是没有用的。(2) 多次验证，可以搜集这个群体的多个时间段的数据，重新作模型进行验证，判断哪个是最合适的；也可以开始采集足够多的观测数据，将数据集分为两个或多个样本，用一部分数据建模，再用别的数据验证得到模型的适合性，也就是交互验证。



三、模型修正的流程

1. 模型类型

模型修正主要涉及三类模型：零模型（null model）、饱和模型（saturated model）和理论模型（theoretical model）。

零模型即独立模型，是限制最多的模型，其各个变量间的相关性限制为零。饱和模型是对参数间关系最无限制的模型，各个变量间都假设相关或者有因果关系。理论模型即根据实际意义设定的模型亦是假设模型，其模型的限制条件介于零模型和饱和模型之间。如研究学生理科能力的影响因素，考虑用数学、物理和化学的成绩反映。图 6—1、图 6—2 和图 6—3 分别为零模型、饱和模型和假设模型的示意图。表 6—1 是三类模型在参数、自由度、拟合、卡方值方面的比较。

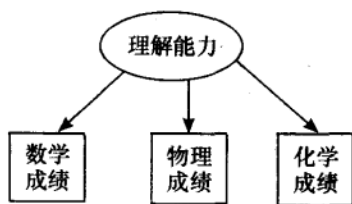


图 6—1 零模型示意图

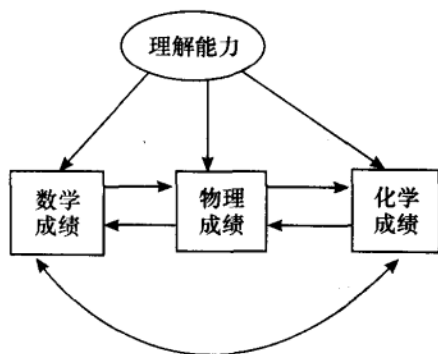


图 6—2 饱和模型示意图

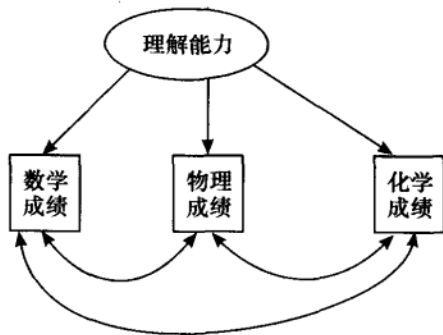


图 6—3 假设模型示意图

表 6—1 三类模型在参数、拟合等方面的比较

项 目	比 较		
	零模型	假设模型	饱和模型
参数的限制	最多	居中	最少
自由参数的个数	最少	居中	最多
自由度	最大	居中	最小
对数据拟合程度 ($S-\Sigma$)	最差	居中	最高
χ^2 值	最大	居中	最小



相对而言，零模型限制最多，因为各个可测变量以及潜变量之间的相关系数固定为零，所要估计的参数最少，模型的自由度最大，与数据拟合程度最低，即 S 与 Σ 的差异最大，其卡方值也最大。饱和模型限制最少，要估计的参数最多，包括所有潜变量之间的相关系数，自由度最小，与数据拟合最高， S 与 Σ 差异最小，卡方值也最小。假设模型介于零模型和饱和模型之间。

2. 修正流程

(1) 在开始寻找最佳模型时，首先应该作一零模型的卡方检验，看看是否存在最适合模式 (Anderson & Gerbing, 1988)，方法是以各个模型中最小的卡方值，即以最大的自由度作测试。若零模型不能满足数据拟合的要求，则在这种模型中，不能找到一个拟合好的模型，需考虑另外的模型，比如增加或减少可测变量或潜变量等，或者寻求更新的实际含义支持的其他模型。

(2) 进行上述测试后，需要找出最适合的模型，设开始假设的模型为 M_1 ，如果 M_1 所得到的拟合指数不符合模型最优判断的标准，则需要对模型修正，修正的具体操作方法见第二节。假设通过修正后得到 M_2 ，如果 M_2 比 M_1 卡方值要小，且 M_2 与 M_1 的卡方值差异显著，则认为修正后 M_2 比 M_1 要好，否则就保留 M_1 ，重新对 M_1 进行修正。

(3) 重复进行过程 (2)，直到所得出模型的拟合指数符合模型最优判断标准，模型修正结束。选择最后修正的模型作为所采用的模型。

第二节 模型修正的方法

一、模型修正的依据和途径

模型修正有两个方向，一是向模型简约方面修正，即删除或限制一些路径，使模型变得更简洁；二是向模型扩展方面修正，即放松一些路径的限制，提高模型的拟合程度。显然，两者不能同时兼顾，但无论怎样修正，其最终目的都是获得一个既简约又符合实际意义的模型。按这两个方向修正，主要依据修正指数 (MI) 和临界比率 (CR) 的大小变化进行调整。

1. 修正指数 (modification index, MI)

利用 MI 修正模型，是朝模型扩展方面进行修正。



在模型评价时,引入 χ^2 值作为评价指标,在所有能够建立的模型中,独立模型的 χ^2 值最大。当模型对数据拟合效果提高, χ^2 值就会减小。模型对数据拟合越好, χ^2 值就越小。如以独立模型为基准模型,定义模型即假设模型将原固定为 1 的参数,恢复为自由参数时,定义模型比独立模型拟合效果好, χ^2 值应减小。因此,可以利用 χ^2 值的变化来修正模型。修正指数即两个模型 χ^2 值之差,计算公式如式 (6.1)。

$$MI = \chi^2_i - \chi^2_m \quad (6.1)$$

式中, χ^2_i 是独立模型或基准模型 χ^2 值; χ^2_m 是假设模型(定义模型) χ^2 值。

MI 反映的是一个固定或限制参数被恢复为自由时, χ^2 值可能减少的最小的量。一般认为模型修正后, MI 变化很小,修正没有意义。由于 χ^2 值遵从 χ^2 分布,在显著性水平 $\alpha=0.05$ 时,临界值为 3.84,因而,通常认为 $MI>4$,对模型的修正才有意义。

利用 MI 进行模型修正,是通过放松对变量间关系的约束,使得修正后模型的 χ^2 值与原模型相比大大减少。如在两个变量之间增加设定相关变量,或每一组变量间加一个相关变量,或将直接作用变换为间接作用等。增加路径,寻找 MI 最大值,若增加某一路径的实际意义不明确,可以删除。删除后,重新建模,利用拟合指数评价,若效果不错,表明删除合理。变量间的路径关系或相关关系都可增加或删除。当多个路径系数的 MI 值都大于 4 时,一般选择 MI 值最大的路径系数先释放,如果该约束放松,实际不合理时,可以选择次之的路径。实际应用时需要考虑放松此参数是否有理论基础,即是否能从实际意义上加以说明。Marsh & Hau (1996), Joreskog (1993) 指出,在有合理解释下潜变量之间的相关,可以允许自由估计其参数值,但是对于指标或变量间的误差项相关,除有特殊理由,如其指标或变量间可能存在实际有意义的经济关系,一般不要随便设其误差项间具有相关性。对数值最大的修正指数,如果没有对变量间放松的合理解释时,只能跳过这个参数,改为考虑第二大数值的参数修正,再审查放松限制的合理性,依此类推,直至得到一个合理的模型。如果是比较几个已知模型,则不需考虑修正指数,直接比较模型的拟合指数就可以作出判断和选择。

2. 临界比率 (critical ratio, CR)

利用 CR 修正模型,是朝着模型简约方面进行修正。MI 修正是利用释放参数,考察使 χ^2 值减少的程度作出判断。但释放参数的同时,自由度也



减小，换句话说，如果将原来自由的参数加以限定或固定，则有较多的自由度，但 χ^2 值也较大。因此，简化模型增加了自由度， χ^2 值也加大，即拟合程度降低。为了考察简化模型的效果，当然希望简化的结果使得自由度增加的同时 χ^2 值不要上升太多，即通过限定参数，大大增加自由度而增加很小的 χ^2 值。

CR 是 χ^2 值与自由度的比值，计算公式如式 (6.2)。

$$CR = \frac{\chi^2}{df} \quad (6.2)$$

从式 (6.2) 可以看出，CR 是通过自由度 df 调整 χ^2 值，以供选择参数不是过多，又能满足一定拟合程度的模型。模型修正时，通过限定参数，大大增加自由度而增加很小的 χ^2 值，若将限定参数后模型记为简单模型，原模型为复杂模型，考察参数限定是否合理，利用两个模型 χ^2 值之差，除以两个 χ^2 值自由度之差，生成新的 CR 值。如果其 χ^2 检验显著，即概率 p 小于 0.05 或 0.01，则表明参数限定不合适，复杂模型较好；若 CR 值不显著，表明两模型拟合效果差不多，参数限定合适，可取简单模型。模型修正时，观察寻找 CR 比率最小者，如该比率小于 1，若临界比率是对单个参数调整进行的计算，修正时可以考虑将其设为 0；若临界比率是对两个变量之间路径关系进行调整得到的结果，修正时可以设定为相等。

二、模型修正的内容

模型修正主要基于已有数据对模型进行调整，通常可以考虑从测量模型与结构模型两个方面着手。

1. 测量模型修正

测量模型的修正，涉及参数 Λ_x , Λ_y , Φ , Θ_x , Θ_y 的变动。在参数检验时有问题，如参数取值不合理（不恰当）、参数显著性检验未通过，或由于参数设置不合适，导致模型整体拟合效果不好，可以考虑对参数进行修正。修正的内容通常是改变相应的矩阵。

(1) 添加或删除因子载荷。这一修正是改变矩阵 Λ_x , Λ_y ，即对可测变量与潜变量之间关系进行修正。如 Λ_y 中有些参数的显著性检验未通过，在 Amos 中，参数估计结果，对每一个可测变量的系数都有类似于线性回归中的 t 值，以 CR 值显示，同时给出原假设系数为零成立的概率 p 。若以 5% 显



著性水平检验, p 值很大, 如大于 0.05, 则该系数为 0 的概率 p 较大, 表明引入可测变量与潜变量的这个关系不合适, 似应限定它们之间关系为 0, 则矩阵中与其相应的元素被修改为零。类似地, 还可以对原限定为 1 的参数修改为需要估计的自由参数等。

(2) 添加或删除因子之间的协方差。这一修正是改变矩阵 Φ , 即对潜变量之间是否相关做的调整。如初始设定 ξ_1 与 ξ_3 之间存在相关关系, 则 Φ 中含有 ϕ_{13} 这一元素, 但参数估计后, ϕ_{13} 的取值与实际不符, 这可能是初始设置不合理造成, 可以考虑将其删除, 即 Φ 中 ϕ_{13} 这一元素被修改为零。

(3) 添加或删除测量误差的协方差。这一修正是改变矩阵 Θ_e, Θ_s , 即分别对外生和内生可测变量误差项之间是否相关进行调整。如初始设定内生可测变量 y_1 与 y_3 的误差项 ϵ_1 与 ϵ_3 相关, 则 Θ_e 不是对角阵, 在第一行第三列或第三行第一列的位置, 有 ϵ_1 与 ϵ_3 的协方差。若参数估计后发现该协方差值为负, 显然不合理, 可以考虑删除这一关系, 即该协方差为零, 则矩阵 Θ_e 中相应位置的元素被修正为零。一般来说, 在选择可测变量时, 应尽量避免同一潜变量的不同可测变量之间相关。

2. 结构模型修正

结构模型修正涉及参数 B, Γ 和 Ψ , 主要是增减潜变量数目、改变潜变量之间路径关系或模型残差项之间关系。

(1) 增加或减少潜变量数目。这一修正是改变系数阵 B 或 Γ 的行数或列数。如果变动矩阵 B 的行数, 相当于增加或减少内生潜变量的数目, 即增加或减少方程个数; 如果变动矩阵 Γ 的列数, 相当于增加或减少外生潜变量数目, 这一修正通常是在内生潜变量不变的情况下进行的调整。

(2) 添加或删除路径系数。这一修正是在内生、外生潜变量数目不变的条件下, 对矩阵 B 或 (和) Γ 中的待估计元素所做的调整, 即变动潜变量之间的路径关系。如某个路径系数的检验有问题, 可以考虑删减该路径; 模型拟合程度较低, 而其他修正已无明显效果, 可以考虑是否原设定无路径关系的潜变量之间应添加路径关系等。变动矩阵 B 是添加或删减内生潜变量之间的路径系数, 变动矩阵 Γ 是添加或删减内生潜变量与外生潜变量之间的路径系数。这一修正借助 MI, CR 可以较为有效地完成。

(3) 添加或删除残差项的协方差。这一修正是在内生、外生潜变量数目以及相互间路径关系不变的情况下, 对矩阵 Ψ 中非对角线上元素所做的调整, 即变动残差项之间的关系。如某两个残差项的协方差估计值为负, 或显



显著性检验未通过，表明设定二者之间有相关不合理，或之间的相关与零有显著差异，则该项关系应被删除，即 Ψ 中相应位置的元素应为零。

模型修正可以通过对自由参数的设定，潜变量数目的增减等进行。修正过程主要依据修正指数 (MI)、临界比率 (CR) 的变化，同时也参考各种拟合指数、方程的测定系数等指标，保证最后的模型既简约，又通过各种检验，特别是能够对现象做出合理解释。

三、模型修正检验

模型修正过程中，对参数的增减、限定是否合适，对变量间关系的调整是否适当等，除利用参数的显著性检验、合理性检验进行评价外，还需要进行模型修正前后的比较评价。评价可以采用第五章介绍的模型评价指数，对模型整体拟合效果评价，还可以利用 LR, LM, W 检验对模型修正效果进行评价。

1. LR (likelihood ratio) 检验

LR 检验亦称似然比检验，用于检验对原有模型增加一些参数后的效果。对于有限制条件的模型也称受限模型，增加一些参数，如放松一些参数的限制，形成无限制条件的模型，也称未受限模型。如果两个模型参数都可以用最大似然法估计，记 $L(\theta_R)$ 表示有限制条件时似然函数的最大值， $L(\theta_{UR})$ 表示无限制条件时似然函数的最大值，对原假设 H_0 新增参数为零，进行检验，可以计算似然比，如式 (6.3)。

$$\lambda = \frac{L(\theta_R)}{L(\theta_{UR})} \quad (6.3)$$

式 (6.3) 中，分母来自无限制条件模型，不可能比分子小，因此， λ 取值在 0~1 之间。 λ 接近于 1，说明两个模型的效果差不多，放松约束增加参数意义不大，不能拒绝 H_0 ； λ 接近于 0，表明放松约束，增加参数能大大改善模型效果，拒绝 H_0 。

利用似然比构造的 LR 检验，仍然是对上面的 H_0 进行检验，检验统计量 LR 如式 (6.4)。

$$LR = -2[\log L(\hat{\theta}_R) - \log L(\hat{\theta}_{UR})] \quad (6.4)$$

LR 统计量服从 χ^2 分布，自由度是两个模型参数个数的差，如有限制条件模型待估计参数为 6 个，放松约束增加 4 个自由参数，无限制条件模型的



待估计参数为 10 个, 则 LR 统计量分布的自由度为 $10-6=4$ 。根据给定的显著性水平 α (通常取 0.05), 自由度 (df), 查 χ^2 分布表, 可以得到相应的临界值 χ_{α}^2 。将计算的 LR 与 χ_{α}^2 比较, 若 $LR > \chi_{\alpha}^2$, 则拒绝 H_0 。

LR 统计量也可以写成两个模型拟合函数的形式, 如式 (6.5)。

$$\begin{aligned} LR &= (N-1)F_R - (N-1)F_{UR} \\ &= (N-1)(F_R - F_{UR}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

其中, F_R 和 F_{UR} 分别是有限制和无限制条件模型的拟合函数 F_{ML} , 其分布与式 (6.4) 的 LR 相同。

由于 LR 是由似然比衍生而来, 与 χ^2 值有关, 因此, 在大样本下的检验效力高于小样本。一般用于大样本下模型修正的检验。LR 检验有一个明显不足, 就是在两个模型比较时, 必须将两个模型都估计出来, 而模型修正时, 通常是一个参数一个参数地放松, 即不同时释放好几个约束, 这样, 计算就变得很繁杂。若软件中已有 LR 检验相应程序, 能够使检验变得容易使用。LR 检验在大样本下被使用, 是因为它不要求正态分布的假设。

2. LM (Lagrangian multiplier) 检验

LM 检验亦称拉格朗日乘子 (乘数) 检验, 用于检验对有限制条件模型放松约束增加自由参数的效果。它是从有限制模型出发, 考察放松约束增加自由参数是否会显著地提高模型的解释能力。定义拉格朗日乘子 λ , 用以估计限制条件对参数最大似然估计的影响程度, 计算如式 (6.6)。

$$\lambda = \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \quad (6.6)$$

式中, $\log L(\theta)$ 是无限制条件模型的对数似然函数; θ 是有限制条件模型参数中, 释放一些参数, 即不加限制的参数的最大似然估计。从式 (6.6) 可以看出, 拉格朗日乘子是无限制的对数似然函数对释放参数的导数, 是对数似然函数的斜率, 度量限制条件的边际“价值”, 即对释放参数的每一个施加限制, 会对对数似然函数有多大影响。如果 λ 值很小, 表明放松限制对参数最大似然估计影响不大, 对参数施加限制是有效的, 有限制条件的假设不能被拒绝; 若 λ 值较大, 表明放松限制对参数最大似然估计影响较大, 对参数施加限制不合适, 有限制条件假设被拒绝; 如果限制完全成立, 则偏导数即 λ 等于零。

将式 (6.6) 的 λ 组成的偏导数向量记作 $S(\theta)$, 称为得分 (score) 或分



数向量，所以，LM 检验也被称为得分检验或分数检验。基于 λ 的拉格朗日乘子检验在不同模型中，构造的 LM 统计量不完全相同。在结构方程模型中，针对原假设限制条件成立，即释放的参数为零，构造的 LM 统计量如式 (6.7)。

$$LM = [S(\hat{\theta}_R)]' I^{-1}(\hat{\theta}_R) S(\hat{\theta}_R) \quad (6.7)$$

式中， $S(\hat{\theta}_R)$ 是以 $\hat{\theta}_R$ 估计的 $S(\theta)$ ； $I^{-1}(\hat{\theta}_R)$ 是以 $\hat{\theta}_R$ 估计的信息矩阵。计算如式 (6.8)。

$$I^{-1}(\hat{\theta}_R) = \{-E[\partial^2 \log L(\theta) / \partial \theta \partial \theta']\}^{-1} \quad (6.8)$$

式 (6.8) 是以 $\hat{\theta}_R$ 估计的， $\log L(\theta)$ 是无限制条件的对数似然函数。

LM 统计量服从 χ^2 分布，自由度 m 是有限制条件模型与无限制条件模型自由参数的差，即限制条件模型所限制的参数的个数。根据给定的显著性水平 α ，自由度 m 查 χ^2 分布表，得到临界值 $\chi^2_{\alpha}(m)$ 。若 $LM > \chi^2_{\alpha}(m)$ ，拒绝 H_0 ，表明限制参数是不合适的，释放参数合理。

利用 F_{ML} 和 $\log L(\theta)$ 之间的关系，式 (6.7) 还可以写成式 (6.9)。

$$LM = \frac{N-1}{2} \left(\frac{\partial F_{ML}}{\partial \theta} \right) \left[E \left(\frac{\partial^2 F_{ML}}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \right]^{-1} \left(\frac{\partial F_{ML}}{\partial \theta} \right) \quad (6.9)$$

式中 θ 都是以 $\hat{\theta}_R$ 估计。

由式 (6.9) 可以清楚地看到，LM 检验是以受限模型为基础的，LM 统计量计算只需对受限模型进行估计。如果仅考察一个参数的释放，LM 统计量与修正指数 MI 的结果相同，表示原来被固定或限制的一个参数被释放后，模型重新估计所实际降低的 χ^2 值。

3. W (Wald) 检验

LM 检验从检验参数限制放松时对模型产生的影响，判定限制条件是否成立；W 检验则从参数被限制可能产生的影响，判定限制条件是否成立。对于原假设，限制条件成立，可以沿这样的思路构造检验。对于无限制条件模型定义 $r(\theta)$ ，是一个 $r \times 1$ 向量， r 小于待估计参数阵 θ 的列数，是无限制条件模型与有限制条件模型相比增加的参数个数，换句话说，就是欲限制的参数的个数。如果限制这些参数，即路径为零，则 $r(\theta)$ 的估计为零。对于原假设来说，若限制是有效的，即不能拒绝原假设，限制条件的 $r(\hat{\theta}_{LR})$ 的估计将会与零无明显差异，其就是样本的随机误差；若限制模型不成立，即拒



绝原假设, 这些限制条件的 $r(\hat{\theta}_{UR})$ 的估计将会和零有显著差异。

有限制条件的模型实际上是无限限制条件模型对一些参数加以限制的结果, 因而它们具有嵌套关系。W 检验在判定限制是否有效时, 运用嵌套模型限制部分的 $\hat{\theta}_{UR}$ 。

W 检验统计量如式 (6.10)。

$$W = [r(\hat{\theta}_{UR})]' \left\{ \left[\frac{\partial r(\hat{\theta}_{UR})}{\partial \hat{\theta}_{UR}} \right]' [\text{acov}(\hat{\theta}_{UR})] \left[\frac{\partial r(\hat{\theta}_{UR})}{\partial \hat{\theta}_{UR}} \right] \right\}^{-1} [r(\hat{\theta}_{UR})] \quad (6.10)$$

式中, $r\hat{\theta}_{UR}$ 是以 $\hat{\theta}_{UR}$ 计算的 $r(\theta)$; $\text{acov}(\hat{\theta}_{UR})$ 是 $\hat{\theta}_{UR}$ 渐近方差矩阵的估计; 大括号中的式子是 $r(\hat{\theta}_{UR})$ 渐近方差矩阵的估计。

由式 (6.10) 可知, W 是限制模型所施加限制的渐近方差矩阵估计的逆, 前后与以 $\hat{\theta}_{UR}$ 估计 $r(\theta)$ 相乘的结果。在原假设为真, 即限制成立的情况下, W 服从 χ^2 分布, 自由度 m 是限制条件的个数, 即无限制模型比限制模型所增加的自由参数的个数。以给定的显著性水平 α , 自由度 m 查 χ^2 分布表, 得到临界值 $\chi_{\alpha}^2(m)$, 将计算得到的 W 与临界值比较, 若 $W > \chi_{\alpha}^2(m)$, 则拒绝 H_0 , 表明限制条件不成立, 模型的限制应该放松, 或说对参数放松限制是合适的。如果仅考察一个限制是否合适, 即检验 $H_0: \theta_1 = 0$ 。W 为式 (6.11)。

$$W = \frac{\hat{\theta}_1^2}{\text{avar}(\hat{\theta}_1)} \quad (6.11)$$

式中, $\text{avar}(\hat{\theta}_1)$ 是以 $\hat{\theta}_1$ 估计的渐近方差。这时, W 服从自由度为 1 的 χ^2 分布, 也是线性回归中参数 t 检验的 t 值的平方。

4. 三个检验的不足

借助 LR, LM 和 W 检验可以在模型修正过程中, 很快找到能够释放或固定的参数, 使得修正更快捷、更有效。三个检验统计量是渐近等价的, 即如果样本容量可以无限地增大, 它们将得出相同的检验结果。但一般情况下, 对于同样的样本, 三个检验的结果可能会不同, 甚至有时会相互矛盾。对于线性模型, 同样的样本, 往往是 W 统计量的值最大, LM 统计量的值最小。因此, 对于限制条件成立的假设, 只要 LM 检验拒绝, 其他检验也都拒绝。三个检验中, LM 检验更容易被使用。因为这个检验仅依赖于受限模型的估计, 以受限模型的残差为基础, 考察对参数施加限制的效果。



三个检验在模型修正中运用，有几点需要注意。

(1) 三个检验主要评价 χ^2 估计的改变。由于这些检验主要是评价 χ^2 估计的变化，而不是参数估计的改变，可能会出现小的 LM 值或 W 值导致参数估计值大的改变，而大的 LM 值或 W 值导致小的参数估计改变，从而使模型修正中参数的限制或固定并不合适。因而，模型修正时，应同时关注参数估计的变化和 χ^2 的改变。

(2) 参数释放或限制的次序。模型修正过程中，对参数的释放或限制通常都是逐个地进行，而释放或限制的次序往往会影响到模型中其他参数的显著性检验，因此采用 LM 检验或 W 检验可能会在逐个调整参数的过程中，忽略增加或删减限制的一些组合的模型，而这些模型也许比逐个调整的模型更好。

(3) 释放参数的解释。利用检验判定参数的释放，可能会碰到参数并没有合理的实际意义的问题。因此，模型修正时需要定量与定性分析相结合，即不仅考察检验的结果，还必须对估计参数的解释性作出分析评价。

(4) 检验运用的前提。三个检验运用的前提是模型的基本结构不改变，仅调整或修正一些参数。如果模型的基本结构需要调整，如增加潜变量或改变因果关系的方向等，无法利用这些检验作出判断。

SEM 由于集合了多种传统分析方法之优点，因而成为一种威力强大且应用广泛的分析方法。加上建立模型时富有弹性，允许研究者探索多个不同的理论模式，因此在经济、管理、社会、心理、教育等领域日渐受到研究者的重视。

应用时，要注意以下问题。一是要了解数据与模型吻合的意义，当数据与模型吻合时，只表示数据并不否定研究者所建立的理论模式，但不能说模型是正确的，必须经过模型和变量的实际意义的分析，这是首先的一步和分析过程中重要的一步。二是适合数据的模型可能非常多，因此研究者应该采用上面所讲的两个方法来分析比较不同模型。三是在检查模型整体拟合度时，应该考察多个不同类型的表现稳定的拟合指数，如 TLI, RNI, RMSEA 和卡方。同时也要考虑个别参数的拟合度和合理性。四是如果数据量较多，最好采用交互验证，确定模型的适用性。结构方程模型的适合样本数据在 200 个左右，一般不少于 150 个，不大于 500 个。如果数据量很多，可以将样本随机分为 2 组，以进行交叉验证，即以一组数据建立模型，另一组数据用来进行验证。



四、案例分析

[例 6.1] 某市城镇居民购房意向研究。

(1) 数据说明。本例采用中国人民大学计算机辅助电话调查系统 (CATI 2.0) 搜集原始数据, 2003 年 7 月在某市按城区分层抽样随机抽取电话号码, 最终得到 431 个住户的调查结果。模型估计采用最大似然估计 (ML), 一般要求样本容量在 200 个以上, 为了校验的需要, 在 400 个样本中随机抽取 200 个作为训练样本, 剩下的 200 个作为验证样本。模型的建立采用 SPSS 公司的 Amos 4.0 软件。

(2) 设定初始模型。建立居民购房意向的结构方程理论模型, 首先需要根据有关理论和以往的研究成果, 构建潜变量和可测变量以及潜变量和潜变量之间的关系, 通常采用路径图的形式表示。

1) 潜变量与结构模型。目前人们选购新房, 不再单纯注重住房面积的扩大, 而是对居住质量、社区环境等都有了更高的要求, 绿色住宅、环保住宅等新的消费观念正在被越来越多的置业者接受。根据实际经验和以往的研究成果, 影响居民购房意愿的因素有: 本人及家庭背景、现有住房状况、施工质量、交通便利度、卫生状况、小区环境、物业管理等。这些因素都不是直接可测的, 可以归纳为居民购房意愿研究中的潜变量。通过理论分析确定潜变量为: 购房意向 (η_1)、家庭背景 (ξ_1)、价格承受 (ξ_2)、住房现状 (η_2)、公共设施 (η_3)、小区环境 (η_4) 和小区物业管理 (η_5)。构建如图 6—4 的初始模型。

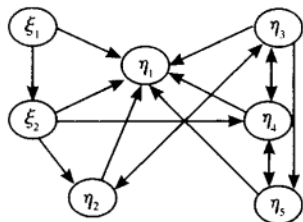


图 6—4 居民购房意向初始模型

7 个潜变量之间相互影响、相互制约。建立如下假设:

H_1 : “价格承受”对“购房意向”具有正向影响

H_2 : “公共设施”对“购房意向”具有正向影响

H_3 : “小区环境”对“购房意向”具有正向影响

H_4 : “住房现状”对“购房意向”具有负向影响



H_5 ：“家庭背景”对“购房意向”具有正向影响

H_6 ：“小区物业管理”对“购房意向”具有正向影响

H_7 ：“公共设施”对“购房意向”具有正向影响

H_8 ：“小区物业管理”对“购房意向”具有正向影响

H_9 ：“价格承受”对“小区环境”、“住房现状”具有影响

H_{10} ：“小区环境”和“住房现状”具有相互影响

H_{11} ：“小区环境”和“小区物业管理”具有相互影响

H_{12} ：“公共设施”和“小区环境”、“住房现状”具有相互影响

初始模型设定中，对于关系不好确定的，可以根据模型可识别的条件，考虑将其相关关系加上，待模型检验、评价后再做调整。

2) 可测变量与测量模型。测量模型建立需要确定与每一个潜变量有关的可测变量。要在充分考虑各种因素的基础上确定各个可测变量，保证可测变量与潜变量密切相关。如潜变量“住房现状”涉及的方面很多，有住房面积、房屋朝向、所在楼层、房屋格局等房屋内部状况，同时还涉及住房周围状况，如房屋所处位置、生活是否方便、环境是否安静等。作为影响居民购房意愿的一个因素，主要考虑住房面积、地理位置、生活便利和环境舒适。围绕这四个方面设计问题，可以作为潜变量“住房现状”的可测变量。本例针对 7 个潜变量，综合考虑各个影响因素，初选了 21 个可测变量，如表 6—2 所示。

表 6—2 协方差结构模型的变量对应表

潜变量	可测变量	潜变量	可测变量
ξ_1 ：家庭背景	x_1 ：年龄	η_3 ：公共设施	y_7 ：交通满意度
	x_2 ：家庭人口		y_8 ：生活设施
	x_3 ：月总收入		y_9 ：教育机构
ξ_2 ：价格承受力	x_4 ：每平方米价格	η_4 ：小区环境	y_{10} ：医疗设施
	x_5 ：首付款		y_{11} ：小区卫生
	x_6 ：月供款		y_{12} ：保洁服务
η_1 ：购房意愿	y_1 ：期望面积	η_5 ：小区物业管理	y_{13} ：小区绿化
	y_2 ：交通便利度		y_{14} ：治安防盗
η_2 ：住房现状	y_3 ：现住房面积		y_{15} ：物业费
	y_4 ：位置满意度		
	y_5 ：生活便利度		
	y_6 ：环境满意度		



(3) 模型修正。采用 Amos 4.0 软件运算建模。运行初始模型得到统计量的输出。利用 CR 的值调整系数,观察 CR 值,一般要求其在 1~2 之间,如果有路径间 CR 接近零的,可以将其之间的关系系数调整为零。从模型输出结果可以看到,潜变量之间路径系数中,“小区物业管理”对“购买意向”的 CR 最小,接近于零,可以考虑将它们之间的系数设定为零。这样,“小区物业管理”这一潜变量可以删除,与其有关的路径也被全部删掉。这时, η_5 的 2 个可测变量如何处理,是被删除,还是保留?如果保留,放在哪个潜变量下,都值得思考。从对现象的理解, η_1 (小区环境)中,“小区卫生”不如“治安防盗”重要,考虑以“治安防盗”替代“小区卫生”,作为 η_1 的一个可测变量,利用剩余 6 个潜变量重新构造模型。新模型估计结果发现^①,“公共设施”指向“交通满意”的 MI 值最大,参数的显著性检验未通过,表明以“交通满意”测度“公共设施”不合适,将其删除;原问卷设计时有“健身娱乐设施”,考虑以其替代“交通满意”,作为“公共设施”的可测变量。同时发现,“现住房面积”在 η_2 (住房现状)上的因子载荷值过小,显著性检验也未通过,表明以“住房面积”测度“住房现状”研究居民购房意向可能不大合适,也许受访者之所以有购房意向,并不是因为住房面积,而是对交通便利程度不满意,故将原问卷设计中有关“交通满意”替代“现有住房面积”,作为“住房现状”的可测变量。

在模型修正时,既要注意模型检验以及修正效果,包括利用各种拟合指数评价修正后的模型,也要特别注意模型的实际意义,无论是潜变量之间关系、潜变量与可测变量之间关系,还是方差、协方差的关系,没有实际意义的关系或无法解释的关系都应在调整之内。修正时,尽量优先考虑潜变量之间或潜变量与观测变量之间的关系,然后再考虑方差之间的关系。

经过不断修正、调整,最后模型的潜变量结构如图 6—5 所示,潜变量与可测变量对应关系如表 6—3 所示。模型拟合评价结果如表 6—4 所示。

^① Amos 4.0 中,对于每一个可测变量与潜变量、可测变量与可测变量之间的关系都计算并给出相应的 MI 大于 4 的值,供模型修正时参考。

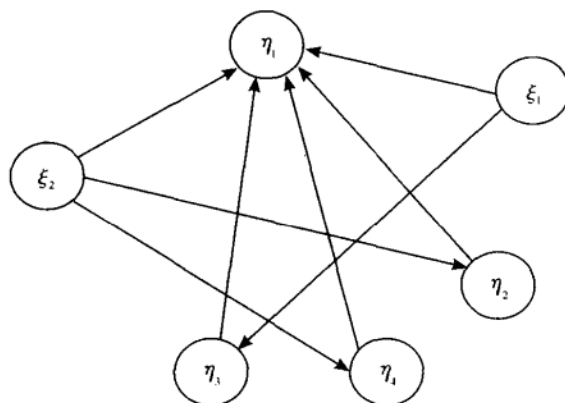


图 6—5 修正后结构模型

表 6—3

修正后模型潜变量与可测变量对应表

潜变量	可测变量	潜变量	可测变量
ξ_1 : 家庭背景	x_1 : 年龄	η_3 : 公共设施	y_7 : 生活设施
	x_2 : 家庭人口		y_8 : 教育机构
	x_3 : 家庭结构		y_9 : 医疗设施
	x_4 : 月总收入		y_{10} : 健身娱乐
ξ_2 : 价格承受力	x_5 : 每平方米价格	η_4 : 小区环境	y_{11} : 治安防盗
	x_6 : 首付款		y_{12} : 保洁服务
	x_7 : 月供款		y_{13} : 小区绿化
η_1 : 购房意愿	y_1 : 期望面积		
	y_2 : 交通便利度		
	y_3 : 位置满意度		
η_2 : 住房现状	y_4 : 交通满意度		
	y_5 : 生活便利度		
	y_6 : 环境满意度		

表 6—4

模型拟合评价

指标	数值	评价标准
测定系数 (χ^2)	221.740	—
自由度 (df)	204	—
调整 $\chi^2 (\chi^2/df)$	1.087	1~2
p 值	0.188	>0.1
GFI	0.958	>0.9
RMSEA	0.014	<0.05
TLI	0.991	>0.9
CFI	0.993	>0.9



由表 6—4 可以看出, 模型拟合效果较好。若模型的解释合理, 表明模型修正合适。

第三节 模型修正时应注意的几个问题

一、缺失值处理

当所建立的模型不合适时, 需要分析原因, 如果是由于数据本身有问题, 则不宜进行修正, 而应先对数据作处理, 再考虑修正。

数据缺失或异常是影响数据质量的一个重要方面。如果数据异常, 确实需要处理, 可以视为数据缺失, 采用类似的方法调整。

(一) 数据缺失的类型

为便于说明, 引入记号 $A(m)$, $A(u)$, $B(m)$, $B(u)$ 。若变量 A 有一部分数据缺失, 记为 $A(m)$, 没有缺失的部分记为 $A(u)$; 其他变量数据缺失部分记为 $B(m)$, 没有缺失的部分记为 $B(u)$ 。

1. 系统缺失 (systematic missing)

当 $A(m)$ 与 $B(m)$ 和 $B(u)$ 之间存在依赖关系, 即变量 A 的缺失数据与其他变量的缺失和不缺失部分的数据相关时, 称为系统缺失。这往往是人为因素造成, 如调查员漏登记或录入人员未将数据录入等。这是数据缺失中不可忽视的一类缺失。如果不加以控制, 会导致结果的系统偏差。

2. 完全随机缺失 (missing completely at random, MCAR)

若 $A(m)$ 与 $B(m)$ 和 $B(u)$ 完全独立, 即变量 A 的缺失数据与其他变量的缺失和未缺失部分数据完全无关时, 称为完全随机缺失。

3. 随机缺失 (missing at random, MAR)

若 $A(m)$ 与 $B(m)$ 相互独立, 但与 $B(u)$ 相关, 即变量 A 的缺失数据与其他变量的数据缺失部分无关, 但与未缺失部分相关, 称为随机缺失。这比完全随机缺失的条件放宽一些, 允许一个变量数据缺失部分与另外变量数据未缺失部分相关。

4. 随机观测 (observed at random, OAR)

若 $A(m)$ 与 $B(u)$ 相互独立, 但与 $B(m)$ 相关, 即变量 A 的缺失数据与其他变量的数据未缺失部分无关, 但与缺失部分相关, 称为随机观测。



一般认为 MAR 和 MCAR 类型的缺失是可以忽略的，通常，缺失 5%~10% 可以接受。但如果缺失过多，造成样本数目不足，则不能忽略，而必须采取措施进行补救处理。缺失值处理方法主要针对 MCAR 和 MAR 类型的缺失，方法大体上分为三类：删除法、取代法和模型处理法。其中前两类方法用于 MCAR 类型的缺失，最后一种既可用于 MCAR 也可用于 MAR 类型缺失。

(二) 删除法

删除法是处理缺失数据的一种基本方法。当采集到的数据量很大时，可以采用将数据缺失的样本（受访者）删除的方法。

1. 表列删除法

表列删除法是将有数据缺失的受访者的所有资料全部删除的方法。不管受访者缺失数据的数量，只要一项遗漏，则该受访者全部资料均被删除，以保证进行运算的所有受访者数据都是完整的。该方法操作简单，但带来两方面的问题。一是若缺失过多，删除受访者过多，导致观测的样本数减少，从而使模型参数得不到正确估计；二是因为一项缺失，删除该受访者所有资料，导致信息浪费。

这种方法只有当观测的样本数据量足够或数据缺失较少，不会因删除导致影响参数的有效估计时，才可采用。

2. 配对删除法

配对删除法是只在需要用缺失或遗漏值进行分析时，才被删除，其他信息仍然被使用的方法。结构方程模型通常以方差—协方差阵为基础进行分析，而协方差由两两变量关系形成，因此，可以在计算中，涉及受访者的该项缺失时，再将其删除；分析其他变量关系时，该受访者的数据仍然被使用。也就是说，该方法不会因为某项的缺失，而影响受访者其他信息的利用。

配对删除法相对于表列删除法，观测样本数量不会因删除而减少过多，同时信息利用较为充分。但同时也带来以下方面的问题：

一是不一致性。由于有的项目（变量）删除了一些值，另一些没有删除，形成在不同项目（变量）上有不同的样本数量，导致不同参数估计时，样本量不同。

二是假设检验产生问题。由于不同参数估计时样本数量不同，使得没有统一的样本数目构造检验统计量。目前，有的软件允许采用这种删除法，构造检验统计量时采用的是最小的样本数目。



三是导致产生系统性偏差。缺失值比率增加，系统性偏差增大。

四是导致以 χ^2 统计量为基础的各种指数产生偏差。 χ^2 统计量的大小受缺失值比率和样本数之间关系的影响，缺失值比率大，有效样本数量减少，按最小样本数计算 χ^2 统计量， χ^2 值可能低估；按最大样本数计算则被高估。以 χ^2 统计量为基础计算的各个拟合指数都会有不同程度的偏差。

五是采用配对删除法，必须假定所有缺失都是 MCAR 类型。

(三) 取代法

取代法是设法为缺失值寻找合适的替代值，将其插补到缺失值的位置，进行计算的方法。因寻找替代值的方法不同而形成不同的取代法。

1. 平均数取代

平均数取代是以变量中有效值的平均数替代缺失值的方法。这种方法简单、容易操作，是常用的一种缺失值处理方法。用平均数取代是建立在变量为正态分布的基础上，如果变量不服从正态分布，以平均数取代缺失值，可能会导致参数估计不正确。在采用平均数取代前，最好将变量未缺失的数据作直方图，观察其分布。可以用该变量的全部数据绘图，若大体服从正态分布，可以采用；若与正态分布差异较大，则视情况另选趋中值，如中位数或众数作为替代值，或将受访者分类，观察每类受访者在该变量上的数据。若全部数据不服从正态分布，但分类后该类数据服从正态分布，则可以该类数据的平均数取代本类中的缺失值。当缺失值过多时，采用平均数取代等于将所有缺失以同一常数替代，从而不能真实反映变量间的相关关系。

2. 回归估计取代

回归估计取代是用回归模型的估计值替代缺失值的方法。这一方法以存在缺失值的变量与其他无缺失值变量建立回归模型，用回归估计值替代缺失值。它可以避免平均数取代以同一常数取代各个缺失值的不敏感性；由于回归模型具有预测性，因而回归估计取代也具有预测性质。

采用回归估计取代虽然可以避免平均数取代的不足，但也存在一些新的问题。首先，由于假定缺失值变量与其他变量不仅相关，而且具有回归关系，完全按回归关系替代，使得变量间回归特性突出，一般性减少，随机变化被限定在回归关系上，变异性被低估；如果变量间相关不充分，即相关程度不高，或有一定程度相关，但并不呈现为回归关系，则回归估计取代不一定比平均数取代效果好。其次，回归估计结果可能超出变量取代值范围，如采用李克特量表为 5 分量表，回归估计取代值估计的结果可能是 6，这时需



要加以调整。

3. Cold deck 取代

Cold deck 取代不是利用获取的数据本身，而是利用外在资源或以往研究结果作为缺失值的替代值。这类似于平均数取代，只不过平均数取代是计算本次获取数据的平均数，作为替代值，是一种内在取代；而 Cold deck 取代是利用外在数据计算平均数作为替代值，是一种外在取代法。

这种方法运用的前提是，有相当的把握认为外在数值比内在数值更有效，其不足同平均数取代。

4. 个例取代

个例取代是通过寻找样本以外、与其类似的观察案例，以其取值替代缺失值的方法。例如，在此次调查数据中，家庭收入有缺失，若判断该家庭估计为中等收入，则以其他类似的中等收入家庭的收入值替代。这种方法可用于仅有少量缺失的情况；若不同变量均有缺失，要找到类似的观察案例所需成本较大，也不易操作。

5. 多元取代

由于上面的每一种方法单独使用都会有不足，为避免这些不足，可以考虑将几种方法组合，如取几种替代值的平均值替代缺失，这就是多元取代。至于选哪几种取代法的估计值，需要根据实际缺失的情况确定。

6. 形态匹配取代

形态匹配取代是一种内在取代法。它是在已经采集的数据中，寻找与缺失值类似的另一个例，即相匹配的个例，以其取值作为替代值的方法。如受访者 A 某个变量有缺失，受访者 B 其他变量取值与 A 相似，但该变量没有缺失，则 B 是与 A 相匹配的个例。可以用 B 在该变量的取值替代 A 的缺失值。这种方法容易操作，仅利用已有数据资料，但如果找不到相匹配的个例，缺失值将无法取代。

（四）模型基础处理法

模型基础处理法因为计算比较麻烦，必须借助计算机完成，因而在实际应用上受到一定限制，这种方法完全从已有数据出发，较为充分地顾及数据的特点，同时考虑到参数估计，因而对于 MCAR 或 MAR 类型的缺失，通常都可以获得无偏估计值。

这一方法大体上有两类，一类是直接对参数作估计，以估计值替代缺失值的方法；另一类是将缺失值直接纳入模型分析，不再需要单独将参数估计



值替代缺失的方法。

1. 期望最大法 (expected maximization, EM)

缺失值处理的目的, 是要保证参数估计过程收敛, 或说使参数得到正确有效估计。如果缺失值过多, 无论采用前面介绍的删除、取代都会有一定不足, 如果从参数估计出发, 将处理缺失与参数估计同时进行, 也可以达到缺失值处理的目的。目前, 关于改进参数估计方法和过程, 解决数据缺失问题, 已有不少研究成果并被实际运用, 期望最大法属于这一类方法。期望最大法即 EM 算法是一种迭代算法, 解决问题的出发点是试图对参数模型做最大似然估计, 但这一估计不是一次完成, 而是重复两个阶段, 既 E 阶段和 M 阶段。E 阶段即 E 步是期望步, 让缺失值获得最佳估计; M 阶段即 M 步是最大化步, 将参数估计值 (均值、方差、协方差、相关系数) 取代相应的缺失值。

设 $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_p)'$ 是多维向量, 均值向量为 $\boldsymbol{\mu}$, 协方差阵为 $\boldsymbol{\Sigma}(\theta)$, 样本容量为 N 。第一步, 即 M 阶段, 用无缺失值样本的均值 $\bar{\mathbf{Y}}$ 和协方差 \mathbf{S} 作为 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}(\theta)$ 的初始估计值; 若每一样本均有缺失, 则以 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Sigma}(\theta) = \mathbf{I}$ 作为初始值。第二步, 即 E 阶段, 计算 $E(y_{i \text{ miss}} | y_{i \text{ obs}}; \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\theta))$ 和 $\text{Cov}(y_{i \text{ miss}} | y_{i \text{ obs}}; \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\theta))$, $(i=1, \dots, N)$ 。这一步实际是试图寻找缺失值的最佳估计。利用最大似然估计得到均值 $E(y_{i \text{ miss}} | y_{i \text{ obs}}; \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\theta))$ 和方差—协方差 $\text{Cov}(y_{i \text{ miss}} | y_{i \text{ obs}}; \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\theta))$, 将这些估计值替代缺失值, 回到第一步, 计算新的 $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\theta)$ 。重复这两步, 直到 $(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k+1}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k+1}(\theta))$ 与 $(\hat{\boldsymbol{\mu}}_k, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k(\theta))$ 的差值小于预先设定的收敛条件。

这一方法避免了人为或主观确定缺失替代的问题, 但从整个过程可以看出, 它增大了缺失值与参数之间的相互依赖关系。

2. MCMC 法 (Markov Chain Monte Carlo)

蒙特卡洛 (Monte Carlo) 模拟是针对实际问题, 建立一个简单且便于实现的概率统计模型, 如服从正态分布的概率模型或遵从几何布朗过程的统计模型, 使它的参数就等于所求问题的解, 如使所求的解正好是模型的期望值; 通过对模型中的随机变量建立适当的抽样方法, 抽取足够的随机数, 在计算机上进行模拟试验, 计算所求的参数; 通过反复模拟计算和分析, 得到所求解的估计 (近似值) 以及精度 (可以用估计值的标准误差或方差) 的估计。Monte Carlo 模拟采用抽样方法产生的随机数, 其均值和协方差都是不变的, 即存在静态性, 而实际的问题往往是均值和协方差并不固定, MCMC 法



能较好地克服这一不足。MCMC 法是在 Monte Carlo 模拟基础上，通过一个平稳分布 $\pi(x)$ 的 Markov 链得到 $\pi(x)$ 的样本，从而完成模拟的方法。

这一方法在参数估计的同时，将缺失值纳入一起分析，不需要再对缺失值做取代。目前，这一方法由于计算机软件提供了一些程序模块而变得容易实现。有兴趣的读者可以参看相关文献。

3. 单一群体 ML 修正法

这一方法是将缺失值直接放入模型中分析的一种缺失值处理法。其基本思路是根据数据完整性的类型，构造对数似然函数，从而得到修正的全部样本的对数似然函数，完成参数的最大似然估计。

表 6—5 是采集 8 个受访者，关于 Y, Z, W 三个项目的数据。

表 6—5 采集的相关数据

i	Y	Z	W
1	20	—	18
2	30	12	16
3	58	14	—
4	—	15	17
5	24	18	32
6	—	19	45
7	16	32	—
8	17	—	20

由表 6—5 可以看出，第 2 个和第 5 个个案的数据在三个项目上是完整的，没有缺失；第 1 个和第 8 个个案有相同的缺失；第 4 个和第 6 个个案、第 3 个和第 7 个个案有相同的缺失。根据表中变量（项目）缺失项的位置，可以确定不同类型的缺失。若记 x_i 为个案 i 的无缺失值的观测数据向量，由表 6—5 可以得到：

$$x'_1 = [20 \quad 18]$$

$$x'_2 = [30 \quad 12 \quad 16]$$

$$x'_3 = [58 \quad 14]$$

$$x'_4 = [15 \quad 17]$$

$$x'_5 = [24 \quad 18 \quad 32]$$

$$x'_6 = [19 \quad 45]$$

$$x'_7 = [16 \quad 32]$$

$$x'_8 = [17 \quad 20]$$





对于变量 Y, Z, W , 记均值为 $\mu' = [\mu_Y \quad \mu_Z \quad \mu_W]$, 方差—协方差为:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} & \sigma_{YW} \\ \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} & \sigma_{ZW} \\ \sigma_{WY} & \sigma_{WZ} & \sigma_{WW} \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} \mu'_2 &= \mu'_5 = \mu' \\ \mu'_1 &= \mu'_8 = [\mu_Y \quad \mu_W] \\ \mu'_3 &= \mu'_7 = [\mu_Y \quad \mu_Z] \\ \mu'_4 &= \mu'_6 = [\mu_Z \quad \mu_W] \end{aligned}$$

可以看出, 表 6—5 的数据确定有四种类型的缺失。不同类型有不同的均值, 同样可以得到不同类型的协方差阵。有

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \Sigma_5 = \Sigma \\ \Sigma_1 &= \Sigma_8 = \begin{bmatrix} \Sigma_{YY} & \Sigma_{YW} \\ \Sigma_{WY} & \Sigma_{WW} \end{bmatrix} \\ \Sigma_3 &= \Sigma_7 = \begin{bmatrix} \Sigma_{YY} & \Sigma_{YZ} \\ \Sigma_{ZZ} & \Sigma_{ZY} \end{bmatrix} \\ \Sigma_4 &= \Sigma_6 = \begin{bmatrix} \Sigma_{ZZ} & \Sigma_{ZW} \\ \Sigma_{WZ} & \Sigma_{WW} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对于第 i 个个案, 定义对数似然函数为:

$$\log L_i = K_i - \frac{1}{2} \log |\Sigma_i| - \frac{1}{2} (x_i - \mu_i)' \Sigma_i^{-1} (x_i - \mu_i) \quad (6.12)$$

式中, K_i 是第 i 个个案的有效变量数。如 $i=2$, 有效变量为 3, 即 3 个变量中均无缺失值; $i=8$, 有效变量数为 2, 有 1 个变量有缺失值。

整个样本的对数似然函数是个案对数似然函数之和, 即有

$$\log L(\mu, \Sigma) = \sum_{i=1}^N \log L_i \quad (6.13)$$

若定义 $\mu = \mu(\theta)$, $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 为模型待估计参数向量 θ 的函数, 则 θ 的 ML 估计, 即 $\log L(\mu(\theta), \Sigma(\theta))$ 最大化也即 $c(\theta)$ 最小化得到式 (6.14)。



$$\begin{aligned}
 c(\theta) &= -2\log L(\boldsymbol{\mu}(\theta), \boldsymbol{\Sigma}(\theta)) + 2 \sum_{i=1}^N K_i \\
 &= \sum_{i=1}^N \log |\boldsymbol{\Sigma}_i| + \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_i)' \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (x_i - \mu_i) \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

式 (6.14) 得到的参数向量的估计值，就是单一群体 ML 修正的估计。

利用这一方法处理缺失，与表列删除法、配对删除法相比，有以下几个特点。

(1) 缺失值为 MCAR 类型时，表列删除法、配对删除法的估计是一致的，但统计上是无效率的，ML 修正法估计既一致且有效率。

(2) 缺失值仅为 MAR 类型时，表列删除法、配对删除法的估计都会有偏差，ML 修正法估计则在大样本下渐近无偏。

(3) ML 修正法可以提供估计标准误差，做参数的统计检验，配对删除法无法提供。

(4) ML 修正法可用于恰好识别、过度识别的模型。

当然，当所有缺失值是忽略时，三种方法均会产生偏差，因而确保数据采集的质量至关重要。ML 修正法也有其不足，即 χ^2 统计量将变化。因而以 χ^2 统计量为基础的拟合指数在使用时要注意。

二、模型修正过程中容易出现的具体问题

(1) 根据理论基础确定一个初始模型，通过数据进行拟合时，模型无法识别。在计算机运算中存在无法识别的变量，通常会给出标示。这时需考虑开始设定模型的准确性，可能开始设定的模型本身就是不可识别的，所以需要 对设定的模型进行修正，如需要加入几个条件等。

(2) 虽然模型是可识别的，但拟合过程中变量的方差为负。这时应进行模型设定的修改，可能是开始的模型设定有问题；如果根据相关理论基础模型设定没有问题，可以直接将方差为负的变量方差设为零，这等于将变量去掉；如果变量不能去掉或者是在经济意义上无法进行修改，只能否决设定的模型。

(3) 修正时，既可以调整系数，也可以调整方程。如果方程的测定系数过小，表明该方程没有必要；若方程的回归系数均不显著，表明该方程没有必要；若一个外生变量的回归系数虽然显著，但删除前后测定系数变化很小，也可以删除。

(4) 避免修正指数 (MI) 的滥用。每一步的修正过程中必须考虑变量之



间的实际意义。如果变量之间实际意义不存在，强行加入之间的关系，会变成数据驱动，导致结果的错误。

三、非递归模型的修正

1. 非递归模型的示例

第二章因果模型中讨论的非递归模型定义，对带有潜变量的结构方程模型同样适用。这里通过例子说明实际应用中非递归模型如何处理。

[例 6.2] Felson 和 Bohrnstedt (1979) 研究了 6~8 年级的 209 个女孩的成绩，其中记录了一些变量： η_1 表示学术能力，用 GPA 测量，记作 y_1 ； η_2 表示个人吸引力，用三个可测变量测量； y_2 为与课程平均分的偏离程度； y_3 为体重； y_4 为个人吸引力评级。

构建如图 6—6 的模型。从图可以看出学术能力是 GPA 和个人吸引力的函数；个人吸引力作为学术能力的函数，同时由成绩偏差、体重、个人吸引力评级加以解释；学术能力和个人吸引力之间存在反馈，模型为非递归模型。模型可以沿着从个人吸引力到学术能力的路径返回无穷多次，并且没有一个外生潜变量（exogenous variables）。

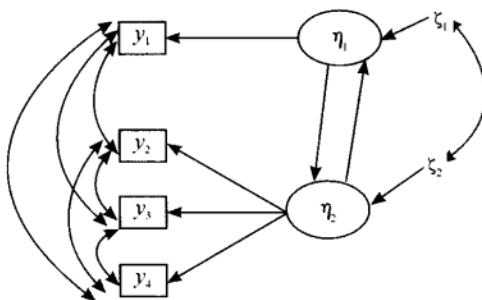


图 6—6 学术能力路径图

2. 非递归模型的修正

对于可以识别的非递归模型，可以用最小二乘法、最大似然估计法等估计参数，但是对于不可识别的模型，则无法估计，需要对模型进行调整使模型可识别，才能估计参数。通常可以增加一些限制条件使模型可识别。

(1) 增加外生变量。增加外生变量，使它影响某一个内生变量而不影响其他内生变量，即通过增加解释变量的数量使模型可以识别，一般情况下，增加外生变量时应首先考虑理论假设的合理性。



(2) 设置工具变量。有时可预先假设有些外生变量对内生变量没有影响，即路径系数为零。这样的变量称为工具变量或工具。设置这一变量为工具变量的目的是使感兴趣的内生变量所在的方程能够识别，但前提是工具变量对其他内生变量的直接影响不为零。在每一个方程中所包含的工具变量的数目应该等于方程中有相互作用因果关系的变量的数目，而且，作为一个秩条件，工具变量在各个方程中必须符合规定的分布形式。最后应注意，一是如果外生变量间高度相关，就不能轻易地将一个变量从方程中删除，理想的情况是工具变量与其他外生变量是独立的，但找到一个好的工具变量往往并不容易；二是相互间有因果关系的内生变量不能有同一个工具变量。

3. 对例 6.2 的修正分析

为了模型的可识别，对两个未观测的误差变量 ζ_1 和 ζ_2 ，规定其回归权重为 1。一般情况，如果没有在模型的结构图中标明或在程序中说明，残差项是不相关的。

由图 6—6 可以看出，该模型允许残差项是相关的。运用最大似然法估计参数，得到的系数和协方差估计结果如表 6—6。

表 6—6 估计结果

路径系数协方差	估计值	S. E.	C. R.
$\eta_1 \leftarrow y_1$	0.023	0.004	6.241
$\eta_2 \leftarrow y_2$	0.000	0.010	0.050
$\eta_2 \leftarrow y_3$	-0.002	0.001	-1.321
$\eta_2 \leftarrow y_4$	0.176	0.027	6.444
$\eta_2 \leftarrow \eta_1$	1.607	0.347	4.599
$\eta_1 \leftarrow \eta_2$	-0.002	0.051	-0.039
$y_1 \leftrightarrow y_4$	0.526	0.246	2.139
$y_1 \leftrightarrow y_3$	-6.710	4.676	-1.435
$y_1 \leftrightarrow y_2$	1.819	0.712	2.555
$y_2 \leftrightarrow y_3$	19.024	4.098	4.643
$y_2 \leftrightarrow y_4$	-0.468	0.205	-2.279
$y_3 \leftrightarrow y_4$	-5.243	1.395	-3.759
$\zeta_1 \leftrightarrow \zeta_2$	-0.004	0.100	-0.382

由表 6—6 提供的 CR 结果可以看出，在模型中有三个假设值得考虑。

(1) η_2 并不依赖于 y_2 ，即个人吸引力并不依赖于其与课程平均分的偏离程度，因为 CR 仅为 0.050。



(2) η_1 不依赖于 η_2 ，即学术能力并不依赖于个人吸引力，因为 CR 仅为 -0.039 。

(3) 残差项 ζ_1 和 ζ_2 是不相关的，因为 $CR = -0.382$ 。

严格地说，不能用临界比率 CR 一次考察 3 个假设，模型修正时，通常是将关系逐个进行考察调整。由于参数估计通常会受到可测变量测量单位的影响，一般采用标准化以避免这一影响。表 6—7 是数据标准化后系数和协方差的估计值。

表 6—7 标准化后估计值

路径系数、协方差	估计值
$\eta_1 \leftarrow y_1$	0.492
$\eta_2 \leftarrow y_2$	0.003
$\eta_2 \leftarrow y_3$	-0.078
$\eta_2 \leftarrow y_4$	0.363
$\eta_2 \leftarrow \eta_1$	0.525
$\eta_1 \leftarrow \eta_2$	-0.006
$y_1 \leftrightarrow y_4$	0.150
$y_1 \leftrightarrow y_3$	-0.100
$y_1 \leftrightarrow y_2$	0.180
$y_2 \leftrightarrow y_3$	0.340
$y_2 \leftrightarrow y_4$	-0.160
$y_3 \leftrightarrow y_4$	-0.270
$\zeta_1 \leftrightarrow \zeta_2$	-0.076

由表 6—7 的估计结果可以看出， η_1 对 η_2 的依赖仍然很小，可以将路径删除，模型的反馈关系不复存在；两个误差项 ζ_1 和 ζ_2 之间的相关程度很低，可以忽略； η_2 对 y_2 的依赖可以暂不忽略，待重新建模后再评价。调整后的模型如图 6—7。模型可以继续估计、检验并评价。

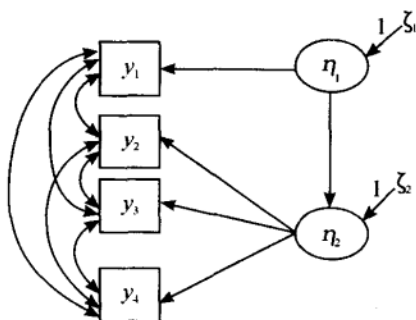


图 6—7 模型修正后的路径图



4. 非递归模型稳定性的判断指标——稳定指数 (stability index)

由于非递归模型中存在反馈关系，可能出现递归模型中不会出现的某些问题。在例 6—2 的模型中，学术能力与个人吸引力存在反馈关系，即相互依赖，这看起来像一个无穷的回归，它们之间的关系是否会很好地收敛到一些定义不错的关系集合。如果会，线性相依系统称为稳定的；否则，称为不稳定的。

一些软件可以判断非递归模型变量的稳定性，如 Amos 软件可以从估计回归权重中计算稳定指数 (stability index) (FOX, 1980; Bentler and Freeman, 1983)。如果稳定指数介于 $-1 \sim 1$ 之间，系统称为稳定的；否则，称为不稳定的。例子中，这个系统是稳定的，因为计算的稳定指数为 0.003。

如果获得一个稳定指数为 1 或者大于 1，表明模型是错误的或者样本太小不能提供精确的估计。如果模型中有几个循环，Amos 将对每个循环计算稳定指数，若其中一个等于或者超过 1，这个线性系统是不稳定的，当前的模型应修正。

四、采用 Bootstrap 方法对模型比较

1. Bootstrap 方法简介

Bootstrap 方法是美国斯坦福大学统计系教授 Efron 于 1978 年提出的一种再抽样方法，亦称自助法。它根据已有的原始样本复制信息，在不需要假定分布、增加新的样本信息基础上，对总体的分布特性进行统计推断。其核心是利用自助样本或称再生样本，估计未知的某些概率统计模型的分布特征值，即由样本的经验分布对总体分布作出估计，如估计均值、中位数及其置信区间等。Bootstrap 也有它的缺点，它需要大的样本，在计算上耗时间，但高性能的计算机可以解决这些问题。

2. 采用 Bootstrap 方法进行模型间的比较

采用 Bootstrap 方法进行多个可选模型间的比较，Bollen (1982), Stine (1989) 提供用 Bootstrap 方法来进行模型间比较的可能性。Linhart 和 Zucchini (1986) 对采用 Bootstrap 方法对模型选择，规定了通常的步骤。这里采用的是 Linhart 和 Zucchini 的方法。

Bootstrap 方法进行模型对比可以概括如下：

(1) 从原始样本通过抽样的方法产生几个 Bootstrap 样本，也就是说，初始的样本作为 Bootstrap 抽样的总体。



(2) 对每个 Bootstrap 样本拟合备选模型, 在分析后, 计算从 Bootstrap 样本获得的隐含矩 (implied moments) 与 Bootstrap 总体矩的偏差 (discrepancy)。

(3) 对每个模型, 计算步骤 (2) 的偏差 (discrepancy) 的平均值。

(4) 选择从步骤 (3) 得到的平均偏差最小的模型。

3. 模型交互效应 (cross-validation) 验证的问题

上述探索性分析所得的最终模型, 基本上是通过不断调试模型与特定样本数据拟合度的产品。然而此模型能否普遍适用于其他样本, 必须进行交互效应检验 (cross-validation)。基本原理是再抽取另一样本对该模型进行拟合度检验。如果原来样本数目足够大, 也可以将原来样本随机分为相等两半。一半进行模型修正, 另一半进行验证性分析。研究者不能用同一数据先作探索分析, 建模后再作验证性分析。Cuduek 和 Browne (1983) 不但详细介绍了交互效度验证办法, 还建议采用交互效度验证指数 (cross-validation fit indices) 检验模式拟合度, 并考虑推论到其他样本及总体 (population) 的适合性。

用验证样本对模型进行检验, 如果检测得到的模型对新的验证数据同样适合, 表明检测得到的模型是合适的, 可以对现象进行解释和进行定量分析。

五、问卷修订

在模型修正的过程中, 可以对问卷进行修订, 增加、删除或对项目作调整。一般来说, 根据模型提供的修正指数增加路径, 观察寻找此指数最大者, 从理论上考察增加这一路径的意义, 若不明确, 说明可以删除一个项目。

问卷修订实际上是模型对可测变量与潜变量之间关系的修正。问卷中的每一个问题即每一个条目, 就是一个可测变量。问卷修订包括: 问卷问题的增减修正; 问卷叙述问题的修正; 问卷分类的修正。

本书未对这部分内容展开, 有兴趣的读者可参看有关文献。

附录 属性变量的处理

前面都假定可测变量以及与其有联系的潜变量是定距及以上测量结果,



通常为连续变量，而实际中，由于测量工具的限制，可测变量并不都符合这个假设。如果可测变量是属性变量，会引起一些问题。在社会科学中常常见到这样一些分类，如教育分成小学、中学和大学教育；收入分成4类或者5类。一般在社会科学中常用的分类尺度是5级、7级或10级，在这些研究中，如果是5级、7级或10级分类且有序，可以在设计问题时将量表转换为分数，即获得定距测量的数据。Lazarsfeld 和 Henry (1968)；Goodman (1972)；Bishop, Fienberp 和 Holland (1975)；Amemiya (1981)；Maddala (1983) 等都研究过分类变量的问题，仅仅分析二分类 (dichotomous) 和定序 (ordinal) 变量情况下对 SEM 模型的影响，主要有下面几个部分：(1) 违背原始假设后果；(2) 对违背后果的稳健性研究；(3) 对属性变量的处理方法。

1. 违背原始假设后果

违背原始假设是指实际观测到的可测变量不再是连续变量的情况。

假设 Y^* 和一个 $p \times 1$ 的变量 η ，遵从通常的测量模型

$$Y^* = \Lambda_Y \eta + \epsilon \quad (\text{附 6.1})$$

其中， $E(\epsilon) = 0$ ； ϵ 和 η 不相关； Y^* 为连续观测变量； η 是潜变量。

如果没有观测到 Y^* ，而观测 Y 。 Y 可能带有一些或所有 Y^* 的信息，但 Y 不是连续观测变量，是 Y^* 离散化的结果。如 Y^* 是服从正态分布的连续变量，而 Y 是四分类的有序变量，这时 $Y \neq Y^*$ 。若有

$$Y = \Lambda_Y \eta + \epsilon \quad (\text{附 6.2})$$

则式 (附 6.2) 表述的测量模型对式 (附 6.1) 并不有效，因为对 Y 的测量模型得出的结论对 Y^* 并不有效。同样的结果对变量 X 和 X^* 亦适用。

第二个后果是定序变量的分布通常不同于连续变量的分布。 $\text{ACOV}(\epsilon_{ij}, \epsilon_{rk})$ 通常不等于 $\text{ACOV}(\epsilon_{ij}^*, \epsilon_{rk}^*)$ ，这里， ϵ_{ij} 和 ϵ_{rk} 是 Y 和 X 对应的协方差阵的元素。 ϵ_{ij}^* 和 ϵ_{rk}^* 是 Y^* 和 X^* 的协方差阵的对应元素。即使当 Y^* 和 X^* 是多元正态时，其定序测量的 Y 和 X 也是高度非正态的。这时考虑应用 ADF 估计量尽可能解决这个问题，然而采用这个方法存在的缺点是定序变量会出现干扰项或者误差项的异方差现象，而 ADF 估计量假设是同方差的。

第三个更严重的后果是由于属性变量违反了协方差结果假设。

假定 Σ^* 是 Y^* 和 X^* 的总体协方差阵，参数估计时，假定 $\Sigma^* = \Sigma(\theta)$ ，但



通常属性变量 Y 和 X 的总体协方差阵 Σ 并不等于 Σ^* , 这样对连续可测变量协方差阵的假设若是有效的, 对属性变量就并不有效, 即不一定有 $\Sigma = \Sigma(\theta)$ 。假定 S 是 Σ 的一致估计量, S^* 是 Σ^* 的一致估计量。基于 S 的参数估计量和任何一个拟合函数, 如 F_{ML} 可能得出与真正的参数向量不一致的估计量 θ 。例如, 在一个简单的回归中, 所有的变量都是 0 均值和方差 1, 回归系数的一致估计量是在 Y^* 和 X^* 之间样本相关的 γ^* , γ^* 的总体对应的是 ρ^* 。如果 Y 和 X 是 Y^* 和 X^* 对应的标准化后的定序变量, 回归系数是 γ , 是 Y 和 X 的样本相关系数。假定 $\text{plim}(\gamma)$ 存在, 它通常不等于真正的参数 ρ^* , 一般情况下, 这两个变量间不一致的幅度依赖 Σ 和 Σ^* 之间差异的关系。

2. 稳健性研究

如果违背假设对模型估计和统计显著性检验的稳健性会产生影响。一些研究人员采用 Monte Carlo 模拟分析定序变量与其对应的连续变量部分(Σ 对 Σ^*) 的相关性推出协方差的假设在多大程度上被违背。由于定序变量的尺度划分是任意的, 因而其也与连续变量的结果不完全一致。Wylie (1976); Martin (1978); Bollen 和 Barb (1981); Olsson, Drasgow 和 Dorans (1982) 和另外一些研究者分析得出分类测量变量之间的 Pearson 相关系数通常小于对应的连续变量的相关系数, 分类越少(如小于 5) 差别越大; 随着分类增加, 边际分布变得越相似, 相关阵之间的差别缩小, Σ 越接近于 Σ^* 。

这个研究仅局限于分析相关性。仅仅几个研究陈述了带有分类变量的 SEM。Olsson (1997a) 分析了一个因子的模型带有 6 个或者 12 个变量。分类的数目范围从 2~9, 观测变量的偏度是变化的, 因子载荷从高到低变化。尺度点越少偏度的差别越大, 导致因子载荷越衰减(attenuation)。

Johnson 和 Creech (1983) 模拟了一个结构模型, 这个模型带有 3 个潜变量, 每个潜变量带有 2 个正态的指示变量, 指示变量被分成 2, 3, 4, 5, 10, 20, 36 类和连续的整数。对分类指示变量的分析结果显示常常有可能低估潜变量模型的系数, 但是在标准化后这个相关系数的差别会更小, 其中大多数的差别小于 0.04。当采用 2, 3, 4 分类变量时常常出现最大的差别。他们没有对分类模型的卡方或者 lambda 估计进行分析。

Fabakus, Ferguson 和 Joresog (1987) 分析了一个带有 4 个指示变量单因子模型, 考察分布的变动对其结果的影响。连续的 Y^* 被分成 5 类, 每类的边际分布或者正态 (U-shaped) 或者带有偏度为 0, 0.5 或者 1.5。他们发现分析 Pearson 相关系数通常导致低估因子载荷和高估其标准误。过度的偏



度导致过大的卡方值，但是当边际分布是钟形的时候是基本正确的。Boomsma (1983) 分析了非正态、离散的分布对 ML 估计量的稳健性。观测变量的分类从 2~5 变化，偏度也进行变化。Boomsma 模型区别前面的模型在于其结构方程模型对 Σ 是有效的，也就是说， $\Sigma = \Sigma(\theta)$ ，离散变量的 Y ， X 的协方差阵 Σ^* ，并不匹配，也就是 $\Sigma^* \neq \Sigma(\theta)$ 。Boomsma (1983) 发现在参数估计上没有偏差但对渐进标准误是不准确的。卡方值显示分类和低偏度仅仅有小的影响，而如果是高的偏度，卡方值常常太高。

Muthen 和 Kaplan (1985) 对非正态的分类变量比较了 ML, GLS, ADF (WLS) 因子分析的估计量，他们发现除了当观测的变量有大的偏度或者峰度，ML 和 GLS 卡方检验和估计的标准误是非常稳健的。

对 SEM 的分类变量的稳健性的技术分析目前还处在研究的前期阶段。多次数据验证的结果表明如果原来的可测变量是连续变量而将它们作为定序变量处理可能存在下面几个问题：

(1) 如果原来正态假设的变量定序化后，存在与正态差别较大的峰度和偏度，会影响 F_{ML} ， F_{GLS} 分析结果的卡方值和 Z 检验的统计显著性。

(2) 对比其分类的数目，齐次性和卡方值的估计会更强烈地受到定序变量偏度和峰度的影响。当协方差结构假设对连续可测变量有效 ($\Sigma^* = \Sigma(\theta)$)，而对定序变量并不有效 ($\Sigma^* \neq \Sigma(\theta)$)，采用标准化可以使估计后的差异减弱。这个估计的差别减弱的方向与分类数目相反，当可测变量是 2 或 3 分类时估计差异最大，而当 7 或者以上分类时估计差异减小。

(3) 如果可测变量有很少的分类，且开始带有较大的初始因子载荷，对带有定序可测变量的模型更可能出现与此相关的测量误差。

(4) 当存在如分类可测变量、非正态分布、过度的偏度和峰度等情况时，一般进行模型的交互验证等来探讨推出的结论是否可以在一个更广泛的条件下应用。

3. 处理方法

上面描述了用定序可测变量代替连续可测变量的几个后果，下面讨论采取修正措施，主要包括两个方法：(1) 加入门限模型；(2) 采用 F_{WLS} 估计量。

(1) 门限模型。如果有式 (附 6.3) ~ 式 (附 6.5)。

$$Y \neq \Lambda_Y \eta + \epsilon$$

(附 6.3)



式中, Y 表示可测变量, 包括内生和外生变量; η 表示潜变量, 包括内生、外生潜变量; ϵ 是随机干扰项。

$$\Sigma \neq \Sigma(\theta) \quad (\text{附 6.4})$$

$$\text{ACOV}(\epsilon_{ij}, \epsilon_{gk}) \neq \text{ACOV}(\epsilon_{ij}^*, \epsilon_{gk}^*) \quad (\text{附 6.5})$$

由式 (附 6.3) 可知, 采用线性模型建立 $Y(X)$ 到 $\eta(\xi)$ 的关系并不合适。需要用非线性模型表示可测的定序变量 (Y, X) 与连续变量 (Y^*, X^*) 的关系。例如一个定序可测变量 Y_1 , 可以表示如式 (附 6.6)。

$$Y_1 = \begin{cases} 1, & \text{若 } Y_1^* \leq \alpha_1 \\ 2, & \text{若 } \alpha_1 < Y_1^* \leq \alpha_2 \\ \dots & \\ c-1, & \text{若 } \alpha_{c-2} < Y_1^* \leq \alpha_{c-1} \\ c, & \text{若 } \alpha_{c-1} < Y_1^* \end{cases} \quad (\text{附 6.6})$$

式中, c 是对 Y_1 的分类数目, $\alpha_i (i=1, \dots, c-1)$ 是分类的门限; Y_1^* 是与 Y 相对应的连续可测变量, Y_1^* 落于不同的门限内决定了 Y 的值。

为了使属性变量在结构方程模型中可以运用, 当可测变量有顺序时, 通常可以在测量模型中加上一个门限模型。它将顺序的 Y, X 与其相应的连续部分 Y^*, X^* 联系起来, 使得

$$Y^* = \Lambda_Y \eta + \epsilon$$

$$X^* = \Lambda_X \xi + \epsilon$$

(2) 采用 F_{WLS} 估计量。用定序可测变量代替连续可测变量的模型, 其协方差阵确实是有效的, 即 $\Sigma^* = \Sigma(\theta)$, Σ^* 是 Y^*, X^* 的协方差阵; 然而对分类的观测变量的模型的协方差, 通常并不有效, 例如 $\Sigma \neq \Sigma(\theta)$ 。因此需要分析通过估计 Σ^* 来代替 Σ 。为了从定序变量中估计 Σ^* , 必须对连续可测变量假定一个分布, 一般假设 Y^* 和 X^* 服从多元正态分布, 可以对每对 Y^*, X^* 估计相关阵。然而, 标准误、 Z 检验、卡方检验和另外的显著性检验的 $F_{\text{ML}}, F_{\text{GLS}}, F_{\text{ULS}}$ 估计量是不准确的。宜采用比它们相对更准确的 F_{WLS} 估计量:

$$F_{\text{WLS}} = [\hat{\rho} - \sigma(\theta)]' W^{-1} [\hat{\rho} - \sigma(\theta)] \quad (\text{附 6.7})$$



其中, $\hat{\rho}$ 是 $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) \times 1$ 和任何两对 Y^* , X^* 变量的 Pearson 相关系数; $\sigma(\theta)$ 是对应的隐含协方差阵; W 是对 $\hat{\rho}$ 的渐近协方差阵的一致估计量 (参见 Muthen (1984))。同时, 采用 F_{WLS} 估计量时, 大的样本量可以保证标准误、 Z 检验、卡方检验等的检验统计量, 但是对于小的或者中等的数量可能值得进一步的再研究。

(3) 对非连续可测变量的初步分析。可以采用前面的分析方法对非连续的可测变量进行研究, 可以采用对待定序变量同样的方法: 构造门限模型, 估计协方差阵 $\hat{\Sigma}^*$, 得到 $\hat{\Sigma}^*$ 的渐近协方差阵的逆阵, 用其作为的权重阵。(见 Muthen (1987), Joreskog 和 Sorbom (1986b) 详细的讨论)。

另外可以通过估计均值和截距项分析非连续的可测变量。Muthen's (1984, 1987) LISCOMP 模型用式 (附 6.8) 的两个方程:

$$\begin{aligned}\eta &= \alpha + B\eta + \Gamma X + \xi \\ Y^* &= \gamma + \Lambda\eta + \varepsilon\end{aligned}\quad (\text{附 6.8})$$

分析非连续的可测变量模型。其中 α 和 γ 是截距项, 其他变量的含义同前面。Muthen (1984, 1987) 提出了 3 阶段方法来解决这个模型, 采用有限信息法 (limited information methods) 和 F_{WLS} 拟合函数。

目前对拟合带有多个非连续可测变量的软件是 Muthen's (1987)、LISCOMP 软件和 Joreskog and Sorbom's (1986a) 的 PRELIS 软件。PRELIS 软件产生 Σ^* 的估计和对 F_{WLS} 得出的权重阵与 LISREL VII 方法得出的结果是一致的。

关于这方面的研究, 有兴趣的读者可以参看书后的参考文献。





• 第七章 •

应用案例

第一节 模型设定

如前文所述,在分析社会与经济问题时,经常存在一些主观或客观的测量误差。传统的统计模型不允许这些误差的存在,因此,需要引入结构方程模型的方法进行这些问题的研究。结构方程模型将这些误差纳入模型,能够加强模型对实际问题的解释性。

结构方程模型分析过程可以分为模型构建、模型运算、模型修正以及模型解释四个步骤。本章以一个研究实例^①作为说明,使用 Amos^② 软件进行计算,阐述在实际应用中结构方程模型的构建、运算、修正与模型解释过程。

一、模型构建的思路

结构方程模型与多元统计中的因子分析不同。因子分析是从数据出

^① 本案例研究出自《中学生道德测评——结构方程模型应用研究》,相关数据采集工作受中国人民大学研究生创新性研究激励计划资助。

^② 相关介绍参见附录一。本章相关分析使用 Amos 6.0。



发，从数据中提炼公共因子即潜变量，进而研究其关系的方法，称为探索性因子分析（exploratory factor analysis, EFA）。结构方程模型是从理论出发，根据已有的理论研究成果或经验，如按照社会学、心理学、经济学或其他人文社会科学的既有理论设定潜变量及模型结构，通过采集相关数据验证事先构建的关系，称为验证性因子分析（confirmatory factor analysis, CFA）。

本章案例以有关理论为依据构建潜变量并建立模型结构，分析研究中学生道德及其影响因素关系问题。根据构建的理论模型，通过调查，运用实际数据进行拟合，再进行模型修正和解释。

二、潜变量的设定

结构方程模型主要研究潜变量之间的结构关系，潜变量的设定是模型建立的基础。潜变量的设定可以用两种方法。一是从理论出发的潜变量构建思路，是指按照研究对象既有理论或经验设定；二是从数据出发的潜变量构建思路，是指通过因子分析从数据中提炼潜变量，这时要注意通过一次因子分析得到的潜变量由于进行了正交旋转，不同因子之间不相关，无法构建结构关系。

潜变量是不可直接观测的变量，如一个人的能力、客户对商品的满意程度等。本案例研究中学生道德问题，而道德不同于人的一般外在特征，属于人的意识形态范畴。个人的道德是在其所处的社会环境影响下逐步形成的，包含很多方面且无法直接测量，是潜变量。

一般来说，道德与优良的品格相伴而生。比如，兼具诸如“成人之美”、“见利思义”、“开拓进取”等品格的人往往被公认为道德水准高于一般大众的君子。

行为准则指的是学生在日常行为中养成的一种规范。这个准则对于一个人的心理以及性格养成起着决定性的作用。它与道德处于社会文化、意识形态的同一层次。在道德发挥作用之前，行为准则担负着调控社会秩序的重任，威慑着社会成员，使之遵从社会公认的良好行为模式。道德形成之后，个体接受道德的影响仍常常借助于个体行为准则。所以，行为准则在道德养成中的重要作用不可低估。

作为社会中的一员，个体无法脱离整体而单独存在。可以从两个角度来



考虑：一方面，社会大环境会对个体的思维、意识以及道德产生影响；另一方面，个体所在的伙伴群体这个小环境也会对其产生影响。这种影响的程度一方面由个体的道德水平确定，另一方面取决于个体如何定义自己与周遭环境的关系，属于人我地位的范畴。

综上，行为准则、人我地位、品格和社会活动与伙伴群体影响这些因素会对道德产生影响。它们同道德一样，都是不可直接测量的潜在变量，需要通过可测变量来测量。

三、可测变量的设定

可测变量是用来度量潜变量的指标，是可以被直接观测或测量的变量。一般来说，可测变量设定时，需要充分考虑如何全面反映潜变量的含义，即潜变量需要从哪些方面进行度量，同时，对同一个潜变量而言，不同可测变量之间最好不相关。譬如，从哲学角度分析“品格”可以分为“坚忍不拔、持之以恒的性格”、“完善与超越自我的精神”和“自信”三个方面，它们是“品格”在不同侧面的具体表现，并且相对独立，可以选择做模型中“品格”潜变量的三个可测变量。可测变量可以是连续变量，如收入、利润等；通过问卷调查反映态度、意愿、行为等，通常采用评分方式，可以用10分量表、7分或5分量表。本例为了使受访者的回答具有良好的区分度，问卷调查^①使用了10分量表。表7—1是测量“坚忍不拔、持之以恒的性格”的题目。

表 7—1 测量“坚忍不拔、持之以恒的性格”的题目

Q17. 请问您在面对挫折时的感受？1 代表很沮丧，没有动力，想逃避；10 代表这不算什么，还可以从头再来

想要逃避	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	想要从头再来
------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	--------

限于篇幅关系，本章不再详细展开关于潜变量与可测变量关系的讨论。根据讨论的潜变量和可测变量的关系，可以建立初始模型如图 7—1 和表 7—2。

^① 本次调查的调查对象是某市某中学高一全体学生，共发放问卷 350 份（回收 303 份），经过整理有效问卷共计 249 份。

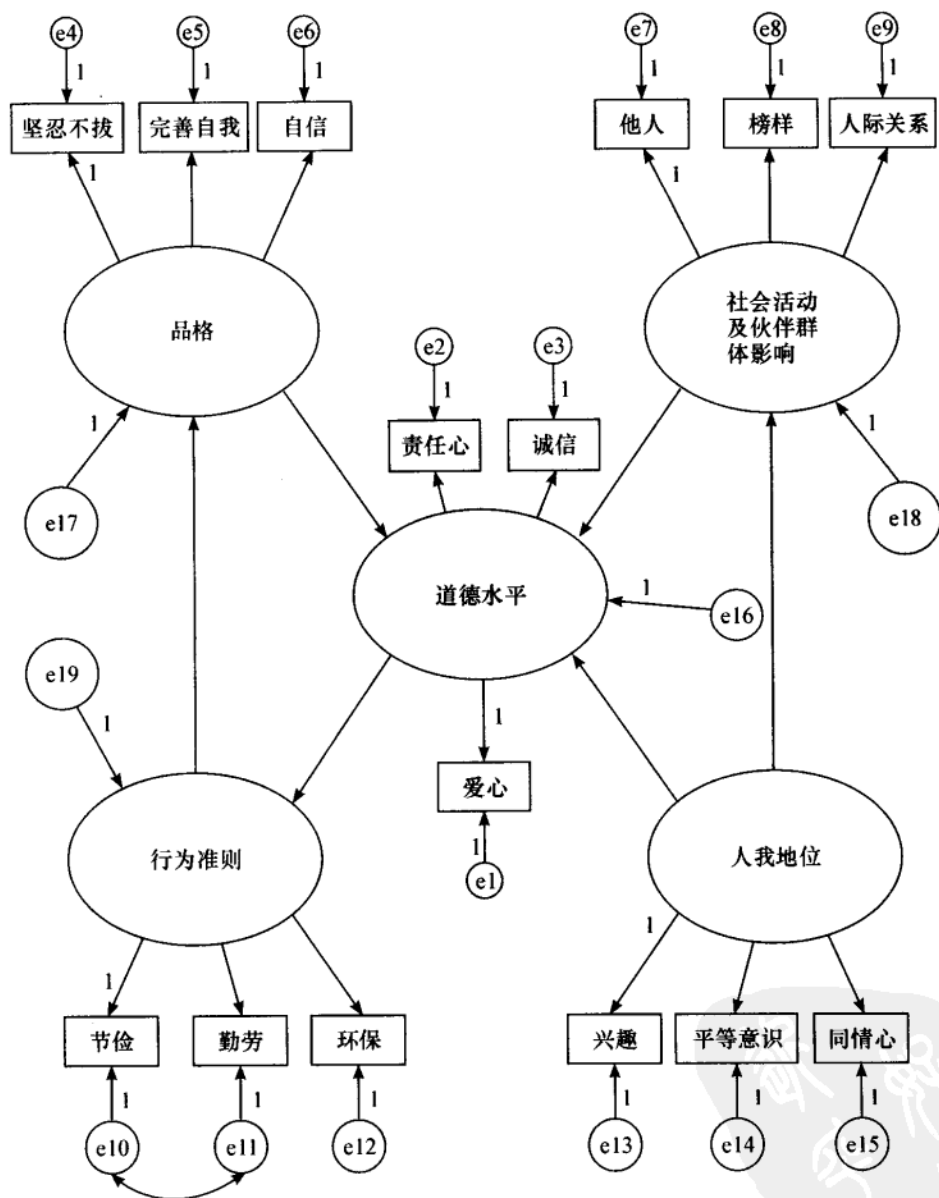


图 7-1 初始模型结构



表 7—2

模型变量对应表

潜变量	可测变量
品格 (ξ_1)	坚忍不拔、持之以恒的性格
	完善与超越自我的精神
	自信
社会活动及伙伴群体影响 (ξ_2)	对他人行为的认识
	对榜样作用的认识
	对人际关系的认识
道德水平 (ξ_3)	爱心
	责任心
	诚信度
行为准则 (ξ_4)	节俭
	勤劳
	环保
人我地位 (ξ_5)	对集体活动的兴趣
	平等意识
	同情心

四、模型基本形式

如前文, 结构方程模型包括测量模型 (measurement model)、结构方程 (structural equation model) 和模型假设^①。最一般的情形是结构方程即因果模型中的外生变量和内生变量都是潜变量, 每一个潜在外生变量和内生变量都有测量变量, 模型如下:

测量方程

$$Y = \Lambda_y \eta + \varepsilon \quad (7.1)$$

$$X = \Lambda_x \xi + \delta \quad (7.2)$$

结构方程

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta \quad (7.3)$$

其中式 (7.1) 为内生潜变量的测量方程, Y 是由 p 个内生指标组成的 $p \times 1$ 向量; η 是由 m 个内生潜变量 (因子) 组成的 $m \times 1$ 向量; Λ_y 是 Y 在 η 上的 $p \times m$ 因子负荷矩阵; ε 是 p 个测量误差组成的 $p \times 1$ 向量。式 (7.2) 是外生潜变量的测量方程; X 是由 q 个外生指标组成的 $q \times 1$ 向量; ξ 是由 n 个外

① 模型假设如下:

1. 测量方程误差项: ε , δ 的均值为 0;
2. 结构方程残差项 ζ 的均值为 0;
3. 误差项 ε , δ 与因子 η , ξ 之间不相关, ε 与 δ 不相关;
4. 残差项 ζ 与 ξ , ε , δ 之间不相关。



生潜变量（因子）组成的 $n \times 1$ 向量； Λ_x 是 X 在 ξ 上的 $q \times n$ 因子负荷矩阵； δ 是 q 个测量误差组成的 $q \times 1$ 向量。在式 (7.3) 中， B 是 $m \times m$ 系数矩阵，描述了内生潜变量 η 之间的彼此影响； Γ 是 $m \times n$ 系数矩阵，描述了外生潜变量 ξ 对内生潜变量 η 的影响； ζ 是 $m \times 1$ 残差向量。

本案例可以将结构方程展开如式 (7.4)。

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_{14} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{23} & 0 & \beta_{25} \\ \beta_{31} & 0 & 0 & 0 & \beta_{35} \\ 0 & 0 & \beta_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \end{bmatrix} \quad (7.4)^\text{①}$$

五、模型识别

利用结构方程模型进行研究，总是希望尽可能全面地用模型描绘客观事物间的关系。但是，一个比较复杂的模型结构可能会导致待估参数过多，甚至导致模型参数无法得到正确估计。模型识别就是考察模型的待估计参数是否能够有效估计。在结构方程模型中，模型的待估参数由模型结构中的方差—协方差决定。在如式 (7.1)、式 (7.2) 的测量方程和如式 (7.3) 的结构方程中，共有 $p+q$ 个可观测变量（指标），可以产生 $(p+q)(p+q+1)/2$ 个不同的方差或协方差。如果理论模型成立，则由 $\Sigma(\theta) = \Sigma$ ，可以得到 $(p+q)(p+q+1)/2$ 个不同的方程。记 t 为模型中待估计的参数个数，模型识别的一个必要条件即 t 规则如式 (7.5)：

$$t \leq (p+q)(p+q+1)/2 \quad (7.5)$$

本案例所设立模型（初始模型）中， $p=12$ ， $q=3$ ，则 $(p+q)(p+q+1)/2=120$ ；而 $t=17 < 120$ ，模型可以识别。

第二节 Amos 实现

一、Amos 基本界面与工具

打开 Amos Graphics，初始界面如图 7—2。其中第一部分是建模区域，

① 为了简化公式，本公式中所有潜变量，包括内生变量和外生变量，均用 ξ 表示。



默认是竖版格式。如果要建立的模型在横向上占用较大空间,只需选择 View 菜单中的 Interface Properties 选项下的 Landscape (见图 7—3),即可将建模区域调整为横版格式。

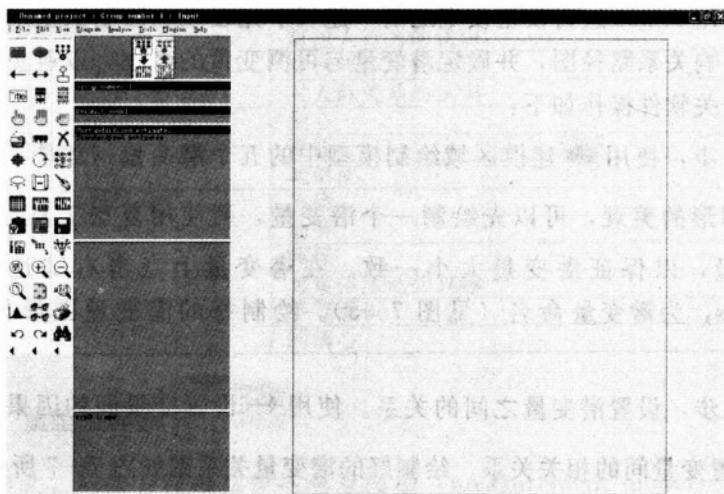


图 7—2 Amos Graphics 初始界面

图 7—2 中的第二部分是工具栏,用于模型的设定、运算与修正。相关工具的具体功能参见附录二。

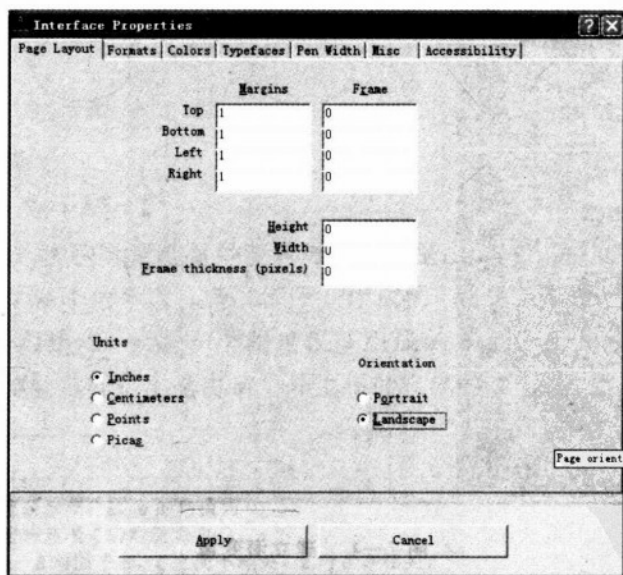




图 7—3 建模区域的版式调整





二、Amos 模型设定操作

1. 模型的绘制

在使用 Amos 进行模型设定之前，建议事先在纸上绘制出基本理论模型和变量影响关系路径图，并确定潜变量与可测变量的名称，以避免不必要的返工。相关软件操作如下：

第一步，使用  建模区域绘制模型中的五个潜变量（如图 7—4）。为了保持图形的美观，可以先绘制一个潜变量，再使用复制工具  绘制其他潜变量，以保证潜变量大小一致。在潜变量上点击右键选择 Object Properties，为潜变量命名（见图 7—5）。绘制好的潜变量图形如图 7—6 所示。

第二步，设置潜变量之间的关系。使用  设置变量间的因果关系，使用  设置变量间的相关关系。绘制好的潜变量关系图如图 7—7 所示。

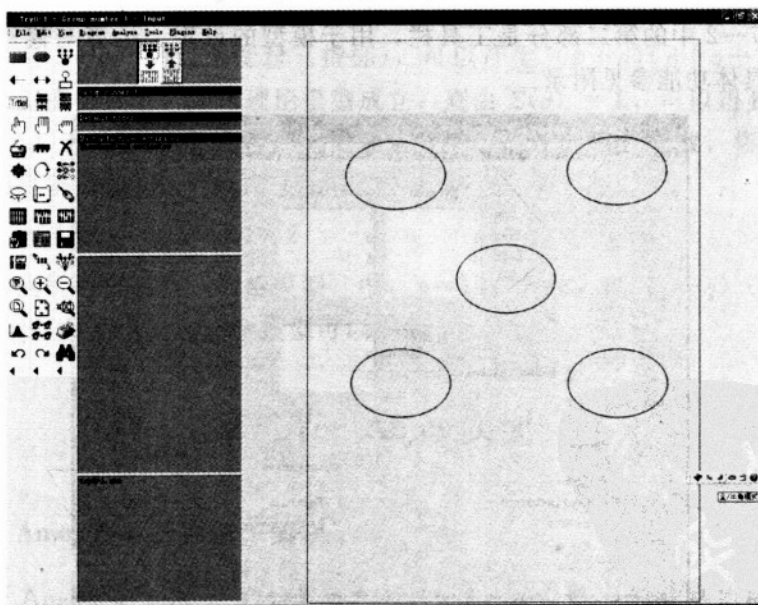


图 7—4 建立潜变量

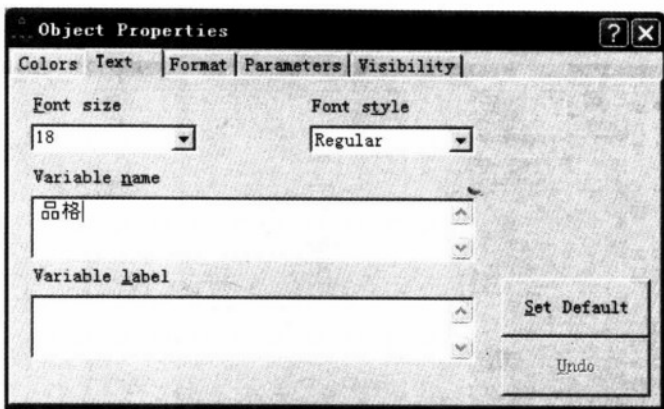


图 7—5 潜变量命名

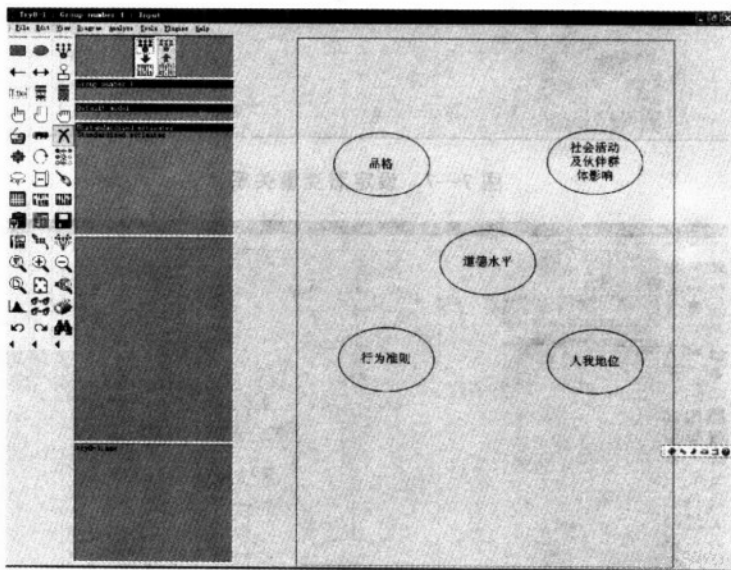





图 7—6 命名后的潜变量

第三步，为潜变量设置可测变量及相应的残差变量，可以使用  绘制，也可以使用  和  自行绘制（绘制结果见图 7—8）。在可测变量上点击右键选择 Object Properties，为可测变量命名。其中 Variable Name 一项对应的是数据中的变量名（如图 7—9）。同理，在残差变量上点击右键选择 Ob-



ject Properties 为残差变量命名。最终绘制完成模型结果见图 7—10。

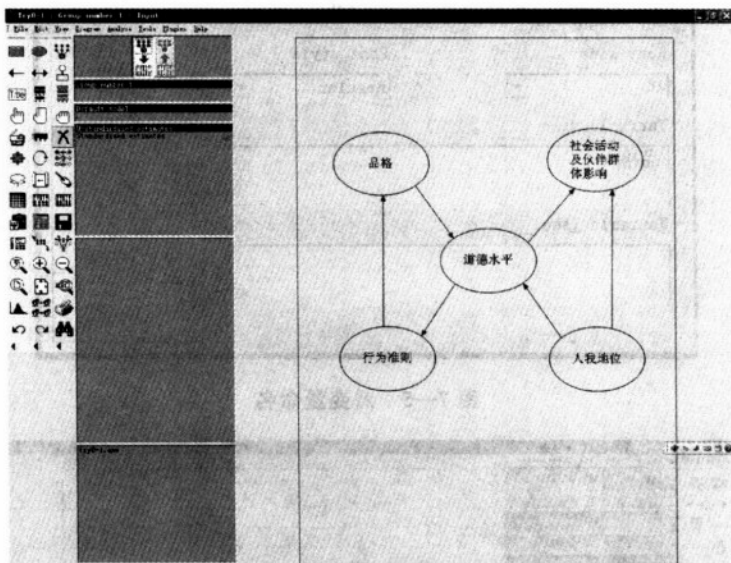


图 7—7 设定潜变量关系

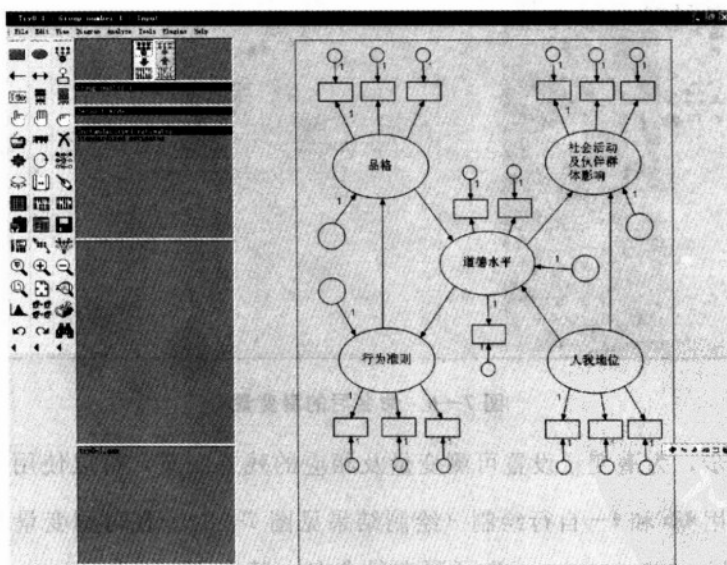


图 7—8 设定可测变量及残差变量

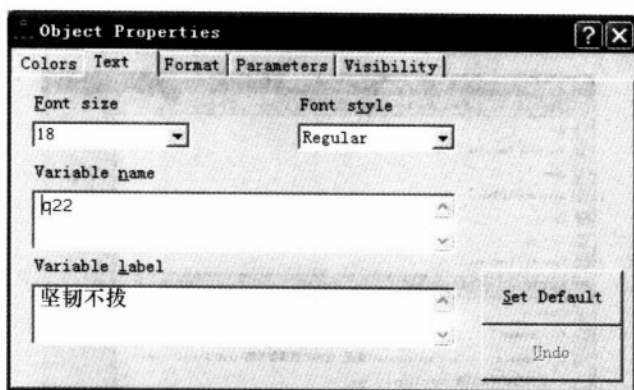


图 7—9 可测变量指定与命名

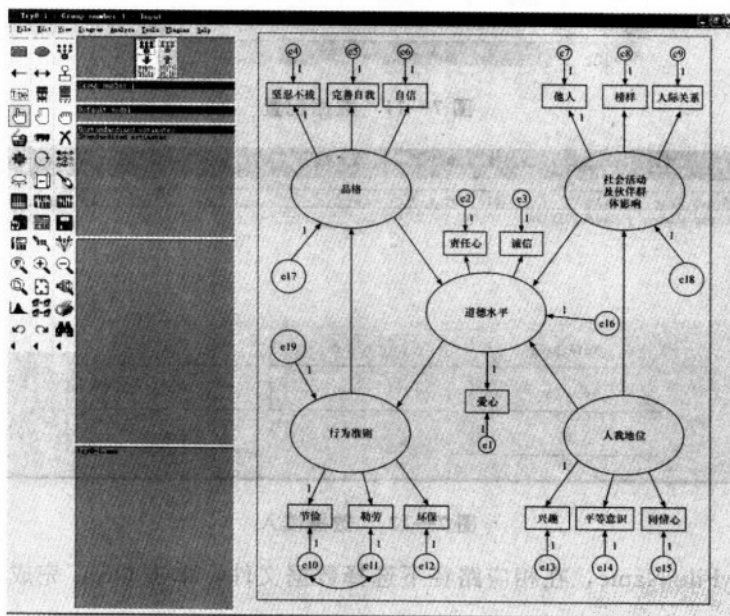


图 7—10 初始模型设置完成

2. 数据文件的配置

Amos 可以处理多种数据格式，如文本文档 (*.txt)、表格文档 (*.xls, *.wk1)、数据库文档 (*.dbf, *.mdb)、SPSS 文档 (*.sav) 等。

为了配置数据文件，选择 File 菜单中的 Data Files (见图 7—11)，出现



窗口见图 7—12。



图 7—11 数据配置

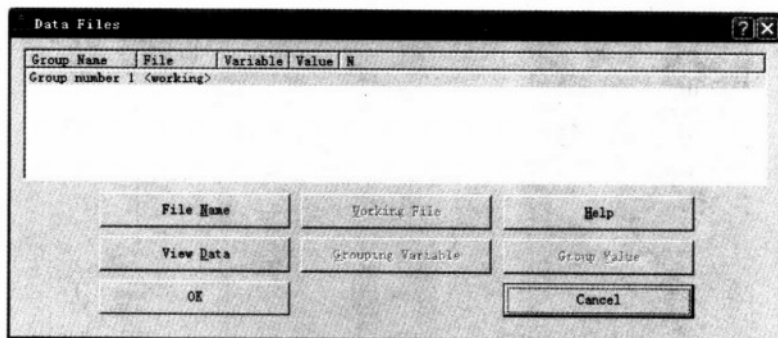


图 7—12 数据读入

点击 File Name，在相应路径下选择数据文件，单击 OK，完成数据文件配置。

3. 缺失值的处理

在调查过程中，难免会有缺失数据产生，分析处理时主要采用下列三种方法进行处理：

(1) 表列删除法。表列删除法是指在一条记录中，只要出现一项缺失，则删除该条记录。这种方法虽然可以使处理后的数据保持完整，但容易造成样本量大量减少。另一方面，有的记录可能只缺少一项或两项数据但也被完



全删除，浪费了其他的有效信息。

(2) 配对删除法。配对删除法是指一条记录只在分析其缺失的数据时才被删除。这种方法相对表列删除法而言，对信息的利用更加充分。但是，由于分析不同问题使用的样本不同，使得估计出的模型参数具有不一致性，引起解释上的困难。另外，配对删除法还会导致以 χ^2 统计量为主的多种模型拟合指标产生偏差。

(3) 插补法。插补法是指用一些数值来替代缺失的数据。这种方法克服了前两种方法样本量减少和信息浪费的缺点。插补法的关键在于，使用什么方法找到可以替代缺失数据的数值。Amos 提供了三种数据插补的方法：回归插补 (regression imputation)、随机回归插补 (stochastic regression imputation) 和 Bayesian 插补 (Bayesian imputation)。^①

由于本案例调查所得数据缺失较少，使用表列删除法处理缺失数据。处理后共有 249 条有效记录。

三、数据的信度与效度

1. 数据的信度检验

信度 (reliability) 指测量结果 (数据) 一致性或稳定性的程度。一致性主要反映内部题目之间的关系，考察测验的各个题目是否测量了相同的内容或特质。稳定性是指用一种测量工具 (譬如同一份问卷) 对同一群受试者进行不同时间上的重复测量结果间的可靠性。如果问卷设计合理，重复测量的结果间应该高度相关。由于本案例并没有进行多次重复测量，所以主要采用反映内部一致性的指标测量数据的信度。

折半信度 (split-half reliability) 是将测量工具中的条目按奇偶数或前后分成两半，采用 Spearman-brown 公式估计相关系数，相关系数高表明内部一致性好。折半信度系数建立在两半问题条目分数的方差相等这一假设基础上，但实际数据往往不一定满足这一假设，信度往往被低估。Chronbach 在 1951 年提出了一种新的方法 (Chronbach's α 系数)，这种方法将测量工具中任一条目结果同其他所有条目作比较，对量表内部一致性估计更为慎重，弥补了折半信度的不足。本章采用 SPSS 13.0 研究数据的内部一致性。在 Analyze 菜单中选择 Scale 下的 Reliability Analysis (见图 7—13)，将

^① 详细请参考 Amos 6.0 User's Guide, 469 页。



数据中待分析的题目——点选，使用 Alpha 模型（见图 7—14），结果（见表 7—3）显示 Chronbach's α 系数为 0.739，说明案例所使用数据具有较好的信度。

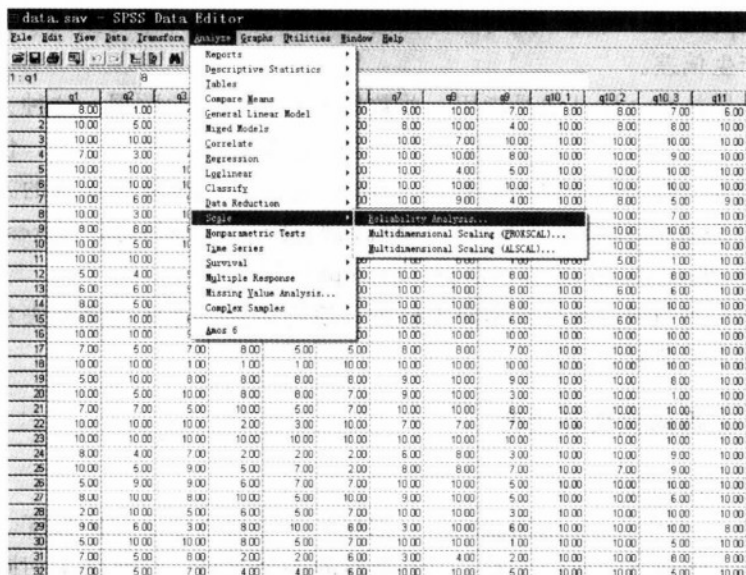


图 7—13 信度分析的选择

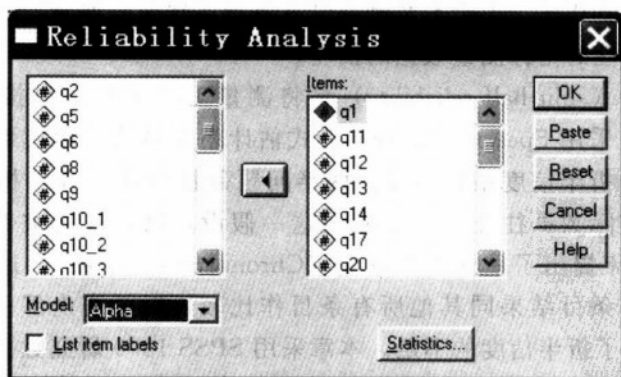


图 7—14 信度分析变量及方法的选择



表 7—3

信度分析结果

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
.739	15

2. 数据的效度检验

效度 (validity) 指测量工具能够正确测量出所要测量的特质的程度, 分为内容效度 (content validity)、效标效度 (criterion validity) 和结构效度 (construct validity) 三个主要类型。

内容效度也称表面效度或逻辑效度, 是指测量目标与测量内容之间的适合性与相符性。对内容效度常采用逻辑分析与统计分析相结合的方法进行评价。逻辑分析一般由研究者或专家评判所选题项是否“看上去”符合测量的目的和要求。

效标效度又称准则效度、实证效度、统计效度、预测效度或标准关联效度, 是指用几种不同的测量方式或不同的指标对同一变量进行测量, 并将其的一种方式作为准则 (效标), 用其他方式或指标与这个准则作比较, 如果其他方式或指标也有效, 那么这个测量即具备效标效度。例如, X 是一个变量, 使用 X_1 , X_2 两种工具进行测量。如果使用 X_1 作为准则, 并且 X_1 和 X_2 高度相关, 则称 X_2 具有很高的效度。使用这种方法的关键在于作为准则的测量方式或指标一定是有效的, 否则越比越差。现实中, 评价效标效度常采用相关分析或差异显著性检验。由于在调查问卷的效度分析中, 选择一个合适的准则往往十分困难, 因而这种方法的应用受到一定限制。

结构效度也称构想效度、建构效度或理论效度, 是指测量工具反映概念或命题的程度, 即反映内部结构的程度, 也就是说如果问卷调查结果能够测量其理论特征, 调查结果与理论预期一致, 则认为数据具有较高的结构效度。一般通过测量结果与理论假设相比较进行检验。确定结构效度的基本步骤是, 首先从某一理论出发, 提出关于特质的假设, 然后设计和编制测量并进行实测, 再对测量的结果采用相关分析或因子分析等方法进行分析, 验证其与理论假设的相符程度。



在实际操作的过程中，前面两种效度（内容效度和效标效度）往往通过专家定性研究或具有公认的效标测量加以判定，结构效度可以采用多种方法得到。


第一种方法是通过模型系数评价结构效度。如果模型假设的潜变量之间的关系以及潜变量与可测变量之间的关系合理，非标准化系数，包括载荷系数和路径系数，应当具有显著的统计意义。特别是通过标准化系数^①可以比较不同指标间的效度。从后面的表 7—9 可以看出，在 90% 的置信水平下，所有非标准化系数具有统计显著性，说明修正模型所使用数据的整体结构效度较好。

第二种方法是通过相关系数评价结构效度。如果在理论模型中潜变量之间存在相关关系，可以通过潜变量的相关系数来评价结构效度：显著的相关系数说明理论模型假设成立，具有较好的结构效度。

第三种方法是先构建理论模型，通过验证性因子分析的模型拟合情况对量表的结构效度进行考评，这就是利用模型的拟合指数对数据的结构效度进行检验。对于本案例，后面表 7—8 的结果显示，修正后模型整体拟合效果尚可，表明结构效度较好。

第三节 模型拟合

一、参数估计方法选择

模型拟合主要是对模型参数进行估计和对模型进行评价，可以通过软件实现。Amos 提供了多种模型拟合方法供选择。^② 通过点击 View 菜单在 Analysis Properties（或点击工具栏的 ）中的 Estimation 页选择相应的估计方法。

本案例使用最大似然估计（maximum likelihood）进行模型参数估计，相关设置如图 7—15 所示。

① 关于标准化系数的解释见本章第五节。

② 详细方法列表参见附录一。

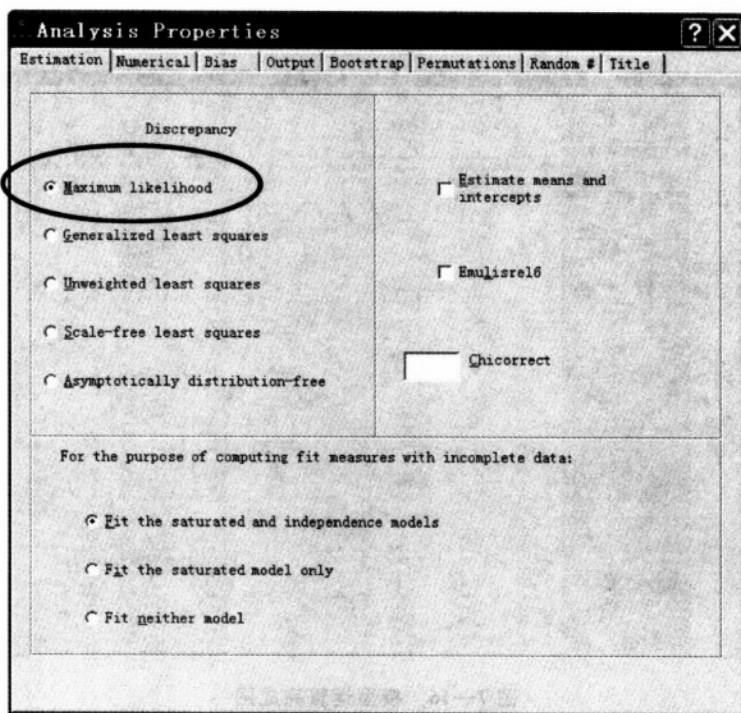





图 7—15 参数估计选择

二、参数估计结果的展示

使用 Analyze 菜单下的 Calculate Estimates 进行模型拟合（或使用工具栏中的 ），输出结果如图 7—16。其中黑框部分是模型运算基本结果信息，使用者也可以通过点击 View the output path diagram  查看参数估计结果图（见图 7—17）。

Amos 还提供了表格形式的模型运算结果详细信息，可以通过点击工具栏中的  查看。详细信息包括分析基本情况（Analysis Summary）、变量基本情况（Variable Summary）、模型信息（Notes for Model）、估计结果（Estimates）、修正指数（Modification Indices）和模型拟合（Model Fit）六部分。在分析过程中，一般通过前三部分^①了解模型，在模型评价时使用估

^① 分析基本情况（Analysis Summary）、变量基本情况（Variable Summary）、模型信息（Notes for Model）三部分的详细介绍见附录三。



计结果和模型拟合部分，在模型修正时使用修正指数数部分。

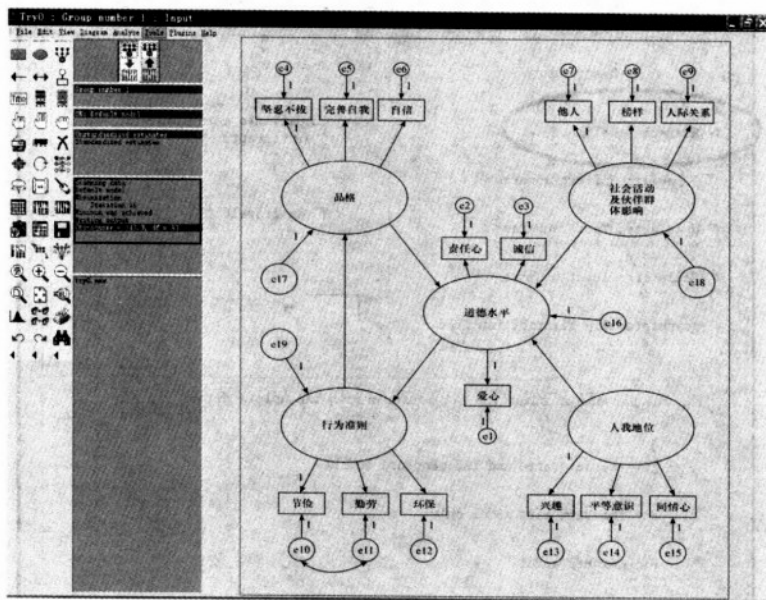


图 7—16 模型运算完成图

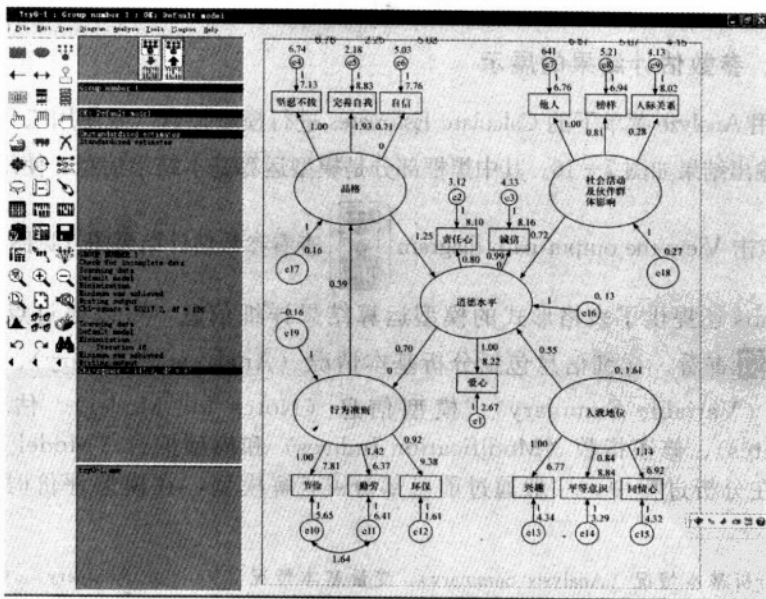


图 7—17 参数估计结果图



三、模型评价

1. 路径系数/载荷系数的显著性

参数估计结果见表 7—4~表 7—6, 模型评价首先要考察模型结果中估计出的参数是否具有统计意义, 需要对路径系数或载荷系数^①进行显著性检验, 这类似于回归分析中的参数显著性检验, 原假设为系数等于零。Amos 提供了一种简单便捷的检验, 利用 CR (critical ratio)。CR 值是一个 Z 统计量, 使用参数估计值与其标准差之比构成 (见表 7—4 中第四列), 同时给出 CR

表 7—4
系数估计结果
Regression Weights: (Group number 1-Default model)

		Estimate	S. E.	C. R.	P
道德水平	←人我地位	.473	.211	2.240	.025
社会活动及伙伴群体影响	←人我地位	.373	.246	1.519	.129
社会活动及伙伴群体影响	←道德水平	.384	.210	1.828	.068
q7 节俭	←行为准则	1.000			
q4 勤劳	←行为准则	1.444	.314	4.601	***
q11 环保	←行为准则	.931	.218	4.269	***
q13 兴趣	←人我地位	1.000			
q14 平等意识	←人我地位	.803	.160	5.008	***
q20 同情心	←人我地位	1.138	.209	5.439	***
q26 责任心	←道德水平	.805	.118	6.807	***
q25 诚信	←道德水平	.988	.142	6.940	***
q3 他人	←社会活动及伙伴群体影响	1.000			
q12 榜样	←社会活动及伙伴群体影响	.932	.250	3.724	***
q1 人际关系	←社会活动及伙伴群体影响	.275	.160	1.716	.086
q22 坚忍不拔	←品格	1.000			
q21 完善自我	←品格	1.940	.692	2.805	.005
q17 自信	←品格	.735	.371	1.980	.048
q28 爱心	←道德水平	1.000			
道德水平	←品格	1.414	.797	1.774	.076
行为准则	←道德水平	.704	.162	4.352	***
品格	←行为准则	.408	.180	2.265	.024

① 潜变量与潜变量间的回归系数称为路径系数; 潜变量与可测量变量间的回归系数称为载荷系数。



表 7—5

方差估计结果

Variances: (Group number 1-Default model)

	Estimate	S. E.	C. R.	P
人我地位	1.650	.466	3.542	***
e19	-.169	.123	-1.375	.169
e17	.126	.123	1.020	.308
e16	.107	.235	.456	.648
e18	.199	.393	.506	.613
e10	5.688	.523	10.884	***
e11	6.460	.626	10.325	***
e12	1.636	.177	9.265	***
e1	2.653	.300	8.838	***
e13	4.299	.479	8.970	***
e14	3.364	.359	9.370	***
e15	4.265	.517	8.245	***
e4	6.762	.626	10.795	***
e5	2.251	.450	4.999	***
e6	5.025	.461	10.891	***
e9	4.146	.376	11.014	***
e8	5.069	.573	8.844	***
e7	6.567	.714	9.198	***
e2	3.081	.312	9.886	***
e3	4.333	.442	9.796	***

表 7—6

协方差估计结果

Covariance: (Group number 1-Default model)

	Estimate	S. E.	C. R.	P
e10 \longleftrightarrow e11	1.635	.431	3.798	***

的统计检验相伴概率 p (见表 7—4 中第五列)。使用者可以根据 p 值对路径系数/载荷系数的统计显著性检验结果作出判定。譬如表 7—4 中, “人我地位” 潜变量对 “道德水平” 潜变量的路径系数 (第一行) 为 0.473, 其 CR 值为 2.240, 相应的 p 值为 0.025, 则可以认为这个路径系数在 95% 的置信度下与零存在显著性差异, 因为该路径系数为零的概率仅为 2.5%, 小于 5%, 没有理由认为其会为零, 结果拒绝原假设。同理, 表 7—4 中, “人我地位” 潜变量对 “社会活动及伙伴群体影响” 潜变量的路径系数 (第二行)



为 0.373, CR 值为 1.519, 相应的 p 值为 0.129, 这表明该路径系数为零的概率达到 12.9%, 大于 5% 的显著性水平, 则没有足够的理由认为其在 95% 的置信水平下与零存在显著性差异, 不能拒绝原假设。显著性检验没有通过的系数如何处理, 需要在模型修正过程中删除或根据相关领域知识进一步讨论。

2. 模型拟合程度评价

在结构方程模型中, 试图通过参数估计, 求出那些使样本方差—协方差矩阵 S 与理论模型方差—协方差矩阵 Σ 的差异最小的模型参数。换一个角度, 如果理论模型结构对于收集到的数据是合理的, 那么样本方差—协方差矩阵 S 与理论模型方差—协方差矩阵 Σ 差别不大, 即残差矩阵 $(\Sigma - S)$ 各个元素接近于零。拟合指数正是基于这一思想构建的。

不同类别的拟合指数可以从模型复杂性、样本大小、相对性与绝对性等方面对理论模型进行评价。Amos 提供了多种模型拟合指数 (如表 7—7) 供使用者选择。^① 如果模型拟合不好, 需要根据相关领域知识和模型修正指标进行模型修正。

表 7—7 拟合指数

指数名称		评价标准 ^②
绝对拟合指数	χ^2	越小越好
	GFI	大于 0.9
	RMR	小于 0.05, 越小越好
	SRMR	小于 0.05, 越小越好
	RMSEA	小于 0.05, 越小越好
相对拟合指数	NFI	大于 0.9, 越接近 1 越好
	TLI	大于 0.9, 越接近 1 越好
	CFI	大于 0.9, 越接近 1 越好
信息指数	AIC	越小越好
	CAIC	越小越好

需要注意的是, 拟合指数的作用是考察理论模型与数据的适配程度, 并不

① 详细请参考 Amos 6.0 User's Guide, 489 页。

② 表格中给出的是该拟合指数的最优标准, 譬如对于 RMSEA, 其值小于 0.05 表示模型拟合较好, 在 0.05~0.08 间表示模型拟合尚可 (Browne & Cudeck, 1993)。因此在实际研究中, 可根据具体情况分析。



能作为判断模型是否成立的唯一依据。拟合优度高的模型只能作为参考，还需要根据所研究问题的背景知识进行模型合理性讨论，即模型是否具有合理的意义。有时，拟合指数并没有显示模型达到最优，但如果能够具有实际意义，使用相关理论能够很好地加以解释，则模型的拟合指数并不一定要求最好。

第四节 模型修正

一、模型修正的思路

模型拟合指数和系数显著性检验固然重要，但对于数据分析更重要的是模型结论一定要具有理论依据，换言之，模型结果要可以被相关领域知识所解释。因此，在进行模型修正时主要考虑修正后的模型结果是否具有现实意义或理论价值，当模型效果很差时^①可以参考模型修正指标对模型进行调整。

这种情况下，研究者可以根据初始模型的参数显著性检验结果和 Amos 提供的模型修正指标进行模型扩展（model building）或模型限制（model trimming）。模型扩展是指通过释放部分原限制的路径或添加新路径，使模型结构更加合理，通常在提高模型拟合程度时使用；模型限制是指通过删除^②或限制部分路径，使模型结构更加简洁，通常在提高模型可识别性时使用。

Amos 提供了两种模型修正指标，其中修正指数（modification index）用于模型扩展，临界比率^③（critical ratio）用于模型限制。

二、模型修正指标

1. 修正指数

修正指数用于模型扩展，是指对于模型中某个受限制的参数，若允许自由估计（如在模型中添加某条路径），整个模型改良时将会减少的最小卡方值。^④

使用修正指数修改模型时，原则上每次只修改一个参数，从最大值开始估算。但在实际中，也要考虑该参数自由估计是否有理论根据。

① 如模型不可识别，或拟合指数结果很差。

② 譬如可以删除初始模型中不存在显著意义的路径。

③ 这个 CR 不同于参数显著性检验中的 CR，使用方法将在下文中阐明。

④ 即当模型释放某个模型参数时，卡方统计量的减少量将大于等于相应的修正指数值。



若要使用修正指数，需要在 Analysis Properties 中的 Output 页选择 Modification Indices 项（见图 7—18）。其后面的 Threshold for Modification Indices 指的是输出的开始值。^①

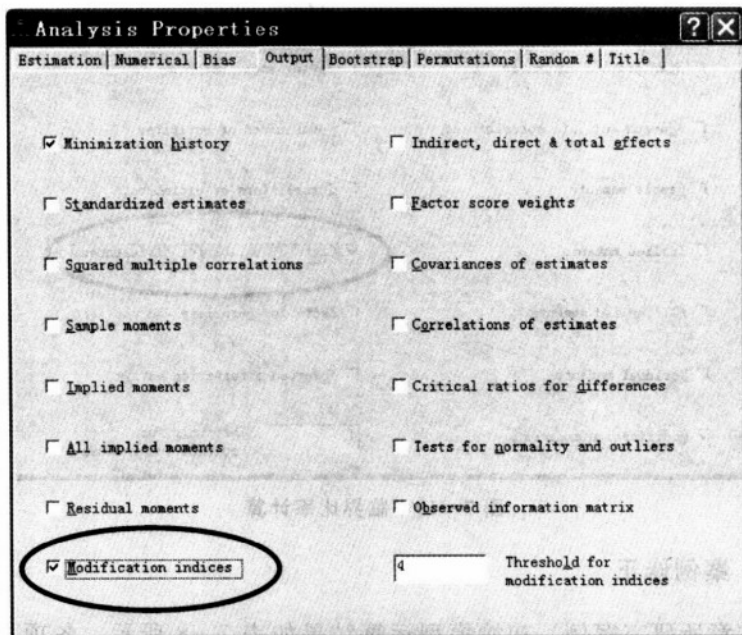


图 7—18 修正指数计算

2. 临界比率

临界比率用于模型限制，在 Amos 中是计算模型中的每一对待估计参数（路径系数或载荷系数）估计值之差，并除以相应参数标准差之差构造的统计量。在模型假设下，CR 统计量服从正态分布，可以根据 CR 值判断两个待估参数间是否存在显著性差异。若两个待估参数间不存在显著性差异，则可以限定模型在估计时对这两个参数赋以相同的值。Amos 计算的 CR，其平方就是 χ^2 值。

若要使用临界比率，需要在 Analysis Properties 中的 Output 页选择 Critical Ratio for Difference 项（如图 7—19）。

^① 只有修正指数值大于开始值的路径才会被输出，一般默认开始值为 4。

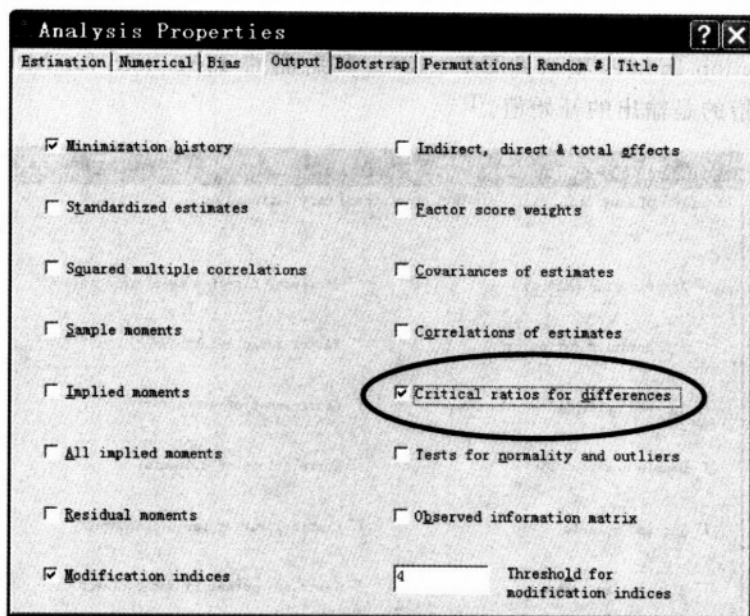


图 7—19 临界比率计算

三、案例修正

对本章所研究案例，初始模型运算结果如表 7—8 所示，各项拟合指数尚可。但从模型参数的显著性检验（见表 7—4）可发现模型中“人我地位”潜变量对“社会活动及伙伴群体影响”潜变量的路径系数与零没有显著差异。这说明对于采集到的数据，这两个潜变量间的影响关系并不存在，在初始模型中删掉此路径得到修正模型（见图 7—20）。

表 7—8 拟合指数计算结果

指数名称		结果	评价
绝对拟合指数	χ^2	143.862	—
	RMSEA	0.054*	尚可
相对拟合指数	CFI	0.874 \approx 0.9**	尚可
信息指数	AIC	217.862	—

* RMSEA 低于 0.1 表示好的拟合；低于 0.05 表示非常好的拟合（Steiger, 1990）。

** 对于相对拟合指数，一般认为其大于 0.9 表示较好的拟合（Bentler & Bonett, 1980）。

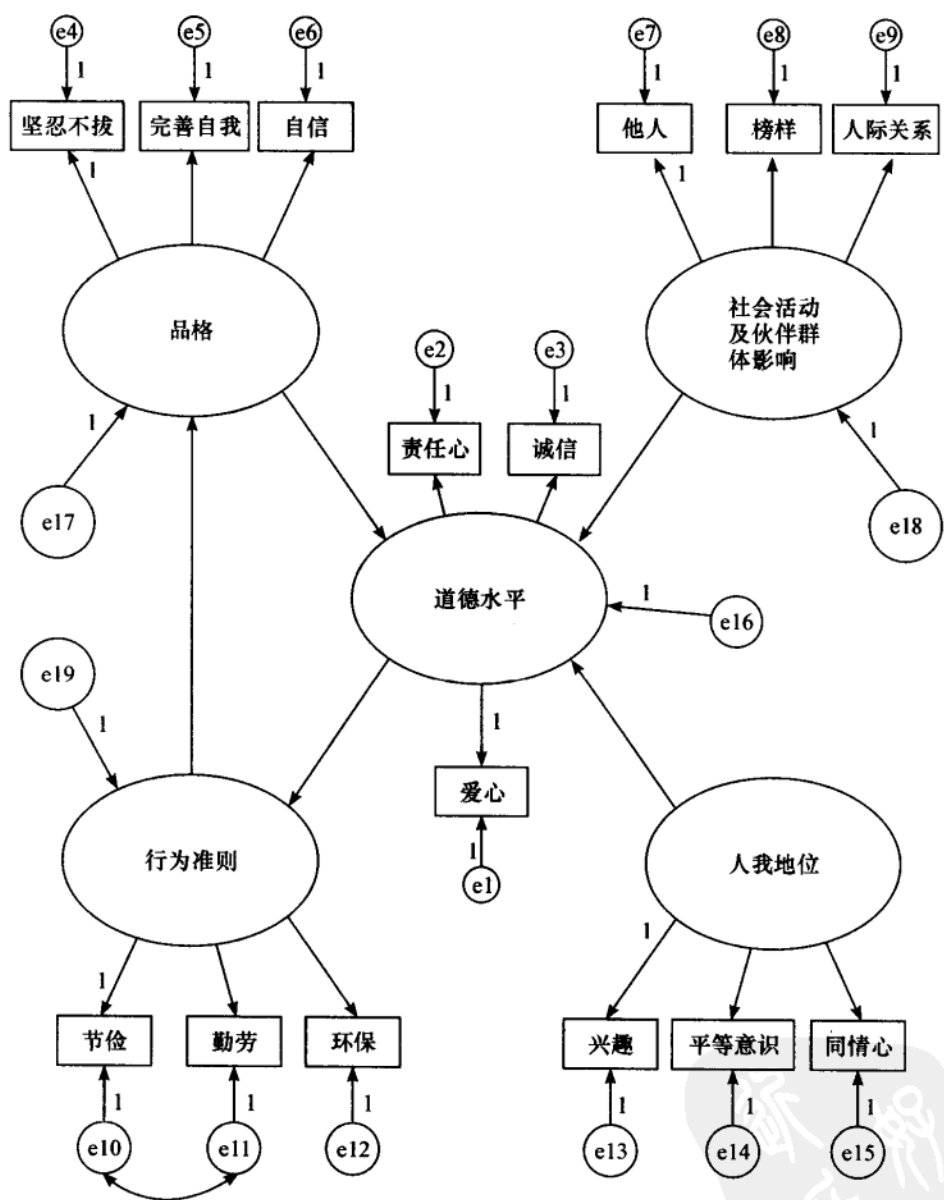


图 7—20 修正模型结构

修正模型运算结果如表 7—9 所示。由表可以看出，其各项拟合指数与初始模型差异不大。虽然释放了一个自由参数使得 χ^2 值与 AIC 值略有增大，



但由于模型修正时去掉了不具有显著意义的假设路径关系，使研究结果更具有现实性和解释性。

修正模型的参数显著性检验结果如表 7—10 所示，其各个路径系数/载荷系数在 90% 的置信度下具有显著的统计意义。表 7—11 为模型修正后协方差估计结果。

表 7—9 模型修正后拟合指数

指数名称		结果	评价
绝对拟合指数	χ^2	145.799	—
	RMSEA	0.054	尚可
相对拟合指数	CFI	0.872 \approx 0.9	尚可
信息指数	AIC	247.799	—

表 7—10 模型修正后系数估计结果

		Estimate	S. E.	C. R.	P
道德水平	←人我地位	.552	.193	2.864	.004
社会活动及 伙伴群体影响	←道德水平	.716	.150	4.763	***
q7 节俭	←行为准则	1.000			
q4 勤劳	←行为准则	1.421	.306	4.646	***
q11 环保	←行为准则	.920	.212	4.338	***
q13 兴趣	←人我地位	1.000			
q14 平等意识	←人我地位	.842	.167	5.031	***
q20 同情心	←人我地位	1.139	.214	5.321	***
q26 责任心	←道德水平	.798	.118	6.735	***
q25 诚信	←道德水平	.994	.143	6.954	***
q3 他人	←社会活动及伙伴群体影响	1.000			
q12 榜样	←社会活动及伙伴群体影响	.805	.223	3.608	***
q1 人际关系	←社会活动及伙伴群体影响	.277	.153	1.813	.070
q22 坚忍不拔	←品格	1.000			
q21 完善自我	←品格	1.928	.684	2.819	.005
q17 自信	←品格	.707	.358	1.976	.048
q28 爱心	←道德水平	1.000			
道德水平	←品格	1.245	.678	1.837	.066
行为准则	←道德水平	.698	.157	4.434	***
品格	←行为准则	.388	.173	2.236	.025



表 7—11 模型修正后协方差估计结果

Covariance: (Group number 1-Default model)

	Estimate	S. E.	C. R.	P
e10 ↔ e11	1.587	.428	3.705	***

表 7—12 是修正模型的修正指数 (modification index) 结果, 双箭头 (↔) 部分是残差变量间的协方差修正指数, 表示如果在两个可测变量的残差变量间增加一条相关路径至少会减少的 χ^2 值; 单箭头 (←) 部分是变量间的回归权重修正指数, 表示如果在两个变量间增加一条因果路径至少会减少的 χ^2 值。表 7—13 是修正模型的临界比率 (critical ratio) 的输出结果, 其中 par_1 到 par_36 代表模型中 36 个待估参数, 其含义在模型参数估计结果表中标识。根据 CR 值的大小, 可以判断两个参数的数值间是否存在显著性差异。如果经检验发现参数值间不存在显著性差异, 则可以考虑模型估计时限定两个参数相等。

但是, 无论是根据修正指数还是临界比率进行模型修正, 都要以模型的实际意义与理论依据为基础。对于本案例, 表 7—12 中的修正指数虽然在数值上比较大, 但据此修改后的模型结果缺乏实际意义。譬如, e2 和 e17 分别是“责任心”可测变量和“品格”潜变量的残差变量, 如果在模型中设定二者相关可以使 χ^2 值至少降低 5.134, 但是缺乏认为这两个变量相关的理论依据, 不能进行这个修正。表 7—13 中的某些 CR 值虽然较小, 但据此修改后的模型结果同样缺乏实际意义。譬如, par_26 和 par_28 分别是“兴趣”可测变量和“同情心”可测变量的残差变量方差估计值, 它们之间的差异 CR 值仅为 -0.034, 远远小于 95% 置信水平下的临界值, 说明两个方差间不存在显著差异。因为无法从理论上证明这两个可测变量的方差相等, 所以不能仅仅根据 CR 值进行模型修正。

表 7—12 模型修正指数

	M. I.	Par Change
e2 ↔ e17	5.134	.148
e8 ↔ e3	5.636	-.770
e5 ↔ e2	4.037	.396



续前表

	M. L.	Par Change
e4 \longleftrightarrow e7	4.047	.878
e4 \longleftrightarrow e6	7.061	1.000
e15 \longleftrightarrow e8	5.311	.777
e14 \longleftrightarrow e4	6.517	.819
e13 \longleftrightarrow e8	10.042	1.049
e12 \longleftrightarrow e5	5.761	.328
e11 \longleftrightarrow e18	7.346	.823
e11 \longleftrightarrow e7	6.161	1.010
e11 \longleftrightarrow e13	5.443	-.804
e10 \longleftrightarrow e1	4.329	-.536
q25 \longleftrightarrow q12	4.876	-.125
q3 \longleftrightarrow q4	5.465	.141
q12 \longleftrightarrow q20	5.419	.137
q12 \longleftrightarrow q13	9.468	.188
q17 \longleftrightarrow q22	6.513	.137
q21 \longleftrightarrow q11	4.050	.150
q21 \longleftrightarrow q4	4.027	-.079
q22 \longleftrightarrow q17	6.687	.188
q22 \longleftrightarrow q14	4.094	.160
q20 \longleftrightarrow q12	4.917	.130
q14 \longleftrightarrow q22	5.912	.111
q13 \longleftrightarrow q12	8.252	.165
q4 \longleftrightarrow q3	5.157	.127

模型临界比率输出结果

表 7-13

	par_1	par_2	par_3	par_4	par_5	par_6	par_7	par_8	par_9	par_10	par_11	par_12	par_13	par_14	par_15	par_16	par_17	par_18	par_19	par_20	par_21	par_22	par_23	par_24	par_25	par_26	par_27	par_28	par_29	par_30	par_31	par_32	par_33	par_34	par_35	par_36		
par_1	0																																					
par_2	-0.791	0																																				
par_3	-0.868	-0.529	0																																			
par_4	0.237	1.697	2.405	0																																		
par_5	-0.459	0.637	1.284	-2.136	0																																	
par_6	-0.577	0.627	1.337	-1.661	-0.286	0																																
par_7	-0.149	1.166	2.415	-0.725	0.729	1.346	0																															
par_8	-0.64	0.578	1.021	-1.902	-0.503	-0.218	-1.397	0																														
par_9	-0.356	1.044	1.719	-1.267	0.29	0.607	-0.566	1.334	0																													
par_10	-0.617	0.993	0.859	-1.627	-0.371	-0.132	-1.08	0.031	-0.71	0																												
par_11	-1.394	-1.922	-1.12	-3.148	-2.461	-2.497	-1.281	-2.696	-3.479	-2.201	0																											
par_12	0.884	1.742	2.047	0.676	1.408	1.342	1.1	1.63	1.338	1.56	2.357	0																										
par_13	-0.845	0.024	0.382	-1.516	-0.51	-0.341	-1.038	-0.239	-0.743	-0.232	1.107	-2.177	0																									
par_14	-1.127	-1.131	-0.378	-3.474	-2.463	-1.896	-2.728	-1.949	-2.993	-1.478	0.48	-1.884	-0.59	0																								
par_15	-0.75	0.091	0.641	-2.069	-0.782	-0.56	-1.617	-0.691	-1.563	-0.266	1.808	-1.732	0.023	1.429	0																							
par_16	0.434	1.991	2.177	0.315	1.401	1.619	0.935	1.778	1.314	1.618	2.881	-0.423	1.576	2.54	1.918	0																						
par_17	0.459	1.658	1.85	0.332	1.349	1.298	0.736	1.693	1.265	1.559	2.729	-0.29	1.336	2.466	1.829	0.01	0																					
par_18	-2.107	-3.412	-2.952	-5.641	-5.707	-4.84	-5.275	-5.609	-6.118	-3.802	-2.917	-2.97	-2.303	-2.359	-4.516	-3.658	0																					
par_19	-1.357	-2.479	-2.906	-3.752	-2.994	-5.133	-3.834	-3.699	-4.191	-2.451	-0.56	-2.308	-1.239	-1.207	-2.72	-3.701	-2.592	1.565	0																			
par_20	-1.295	-1.903	-2.028	-3.337	-2.684	-2.453	-3.173	-2.465	-3.042	-2.076	-0.355	-2.66	-1.347	-0.878	-2.054	-2.94	-2.509	0.998	-0.152	0																		
par_21	-1.187	-0.985	-0.569	-2.101	-1.292	-1.178	-1.729	-1.119	-1.516	-0.987	-0.606	-2.024	-0.751	-0.251	-0.934	-2.105	-2.658	0.932	0.239	0.286	0																	
par_22	5.207	9.182	9.117	7.018	8.431	8.78	8.002	9.016	8.513	8.342	9.893	4.33	7.314	9.48	9.092	7.793	5.8	10.475	10.229	9.274	7.782	0																
par_23	5.726	9.655	8.914	7.177	8.519	8.641	8.01	8.86	8.483	8.479	9.274	4.856	7.944	9.17	8.894	8.403	6.195	9.841	9.878	9.34	7.969	1.015	0															
par_24	0.531	4.119	3.98	0.54	2.596	3.119	1.709	3.554	2.737	2.845	5.553	-0.448	2.271	4.34	3.802	0.659	0.012	7	6.674	4.924	2.756	-7.624	-7.852	0														
par_25	1.067	6.227	5.957	5.938	4.808	5.372	4.191	6.32	5.569	5.03	7.179	1.012	4.228	6.561	6.246	2.08	1.944	6.685	7.817	6.817	4.414	-4.946	-5.404	3.069	0													
par_26	3.724	7.184	7.82	5.115	6.498	7.559	6.884	7.138	6.658	6.656	8.037	2.887	6.053	7.717	7.178	4.273	3.312	9.053	8.332	7.672	6.152	-1.834	-2.653	3.233	2.946	0												
par_27	2.665	6.601	6.783	3.927	5.678	5.608	5.146	6.382	5.933	5.869	7.712	1.763	5.089	7.269	6.602	3.045	2.907	9.084	8.116	7.188	5.217	-3.722	-4.34	4.196	1.32	-1.733	0											
par_28	3.586	6.653	6.875	4.797	6.946	6.354	5.096	6.594	6.158	6.201	7.449	2.782	5.715	7.143	6.647	4.052	3.967	8.377	7.715	7.109	5.953	-1.802	-2.576	4.928	2.745	-0.034	1.602	0										
par_29	6.349	9.364	9.352	7.629	8.801	9.096	8.46	9.32	8.943	8.924	10.425	5.571	8.737	9.534	9.249	6.788	6.593	10.842	9.962	9.555	8.362	1.341	0.374	1.883	5.652	3.03	4.775	2.971	0									
par_30	1.619	2.983	2.618	1.325	2.385	2.612	1.947	2.748	2.345	2.579	3.749	0.244	2.447	3.747	2.88	0.934	0.659	4.992	3.389	3.11	2.845	-4.857	-5.335	1.099	-0.858	-3.164	-1.838	-3.006	-5.812	0								
par_31	4.657	8.882	8.873	6.51	8.085	8.521	7.639	8.872	8.344	8.232	9.768	3.751	7.071	9.131	8.876	5.463	5.237	10.886	10.044	9.344	7.369	-0.888	-1.781	6.916	4.281	1.028	2.97	1.07	-2.198	4.283	0							
par_32	3.726	8.42	5.591	7.141	7.989	6.914	8.654	7.799	7.611	9.235	2.826	6.396	9.109	8.468	4.467	4.229	10.849	9.902	8.995	6.373	-2.533	-3.179	6.076	3.044	-0.343	1.621	-0.588	-3.565	3.184	-1.502	0							
par_33	4.516	7.786	7.895	5.955	7.191	7.501	6.914	7.71	7.324	6.961	8.755	3.719	6.794	8.258	7.95	5.152	4.974	9.41	8.786	8.382	5.833	-0.573	-1.437	6.156	4.012	1.173	2.892	1.166	-1.823	4.1	0.249	1.616	0					
par_34	5.153	7.56	7.671	6.228	7.145	7.349	6.652	7.5	7.197	7.646	8.305	4.435	6.946	7.934	7.307	5.449	5.313	8.775	8.311	8.092	5.821	0.819	0.096	6.32	4.693	2.845	3.799	2.317	-0.335	4.789	1.589	2.782	1.445	0				
par_35	2.493	6.919	7.109	3.883	5.828	6.426	5.228	6.348	6.185	6.028	8.178	1.593	5.077	7.6	6.928	2.886	2.712	9.707	8.735	7.881	5.183	-4.138	-4.723	4.203	1.022	-2.131	-0.359	-1.976	-5.168	1.597	-3.423	-2.075	-3.271	-4.165	0			
par_36	3.784	7.776	7.991	5.433	6.99	7.616	6.327	7.556	6.847	7.151	8.712	2.978	6.392	8.596	7.775	4.483	4.271	9.782	9.117	8.475	6.414	-1.927	-2.723	5.737	3.093	-0.019	1.833	0.018	-3.142	3.211	-1.092	0.941	-1.236	-2.421	2.238	0		



第五节 模型解释

结构方程模型主要作用在于揭示潜变量之间（潜变量与可测变量之间以及可测变量之间）的结构关系，这些关系在模型中通过路径系数（载荷系数）体现。对于修正模型，Amos 输出的系数见表 7—10。这些系数可以从几个角度进行分析。

一、因果效应

1. 直接效应（direct effect）

指由原因变量（可以是外生变量或内生变量）到结果变量（内生变量）的直接影响，用原因变量到结果变量的路径系数衡量直接效应；譬如图 7—21 中“道德水平”潜变量对“行为准则”潜变量的直接效应系数为 0.698，这说明当其他条件不变时，“道德水平”潜变量每提升 1 个单位，“行为准则”潜变量将提升 0.698 个单位。又如，“节俭”可测变量和“勤劳”可测变量的直接效应系数为 1.587，这说明两个可测变量间具有一定的相关性。^①

2. 间接效应（indirect effect）

指原因变量通过影响一个或者多个中介变量，对结果变量的间接影响。当只有一个中介变量时，间接效应的大小是两个路径系数的乘积，譬如图 7—21 中“人我地位”潜变量对“行为准则”潜变量的间接效应系数为 0.385 (0.552×0.698)，这说明当其他条件不变时，“人我地位”潜变量每提升 1 个单位，“行为准则”潜变量将提升 0.385 个单位。

二、其他效应

1. 未析效应（unanalyzed effect）

指一个外生变量与一个内生变量之间的相关系数除去直接效应和间接效应的剩余部分，它一般是由相关的外生变量产生的影响。如果模型中不存在相关的外生变量（如本章案例中就不存在），则不会存在未析效应。

^① 实际上，在计算标准化系数时，可测变量间的协方差转化为可测变量间的相关系数，可以更直观地描述变量之间的相关性。

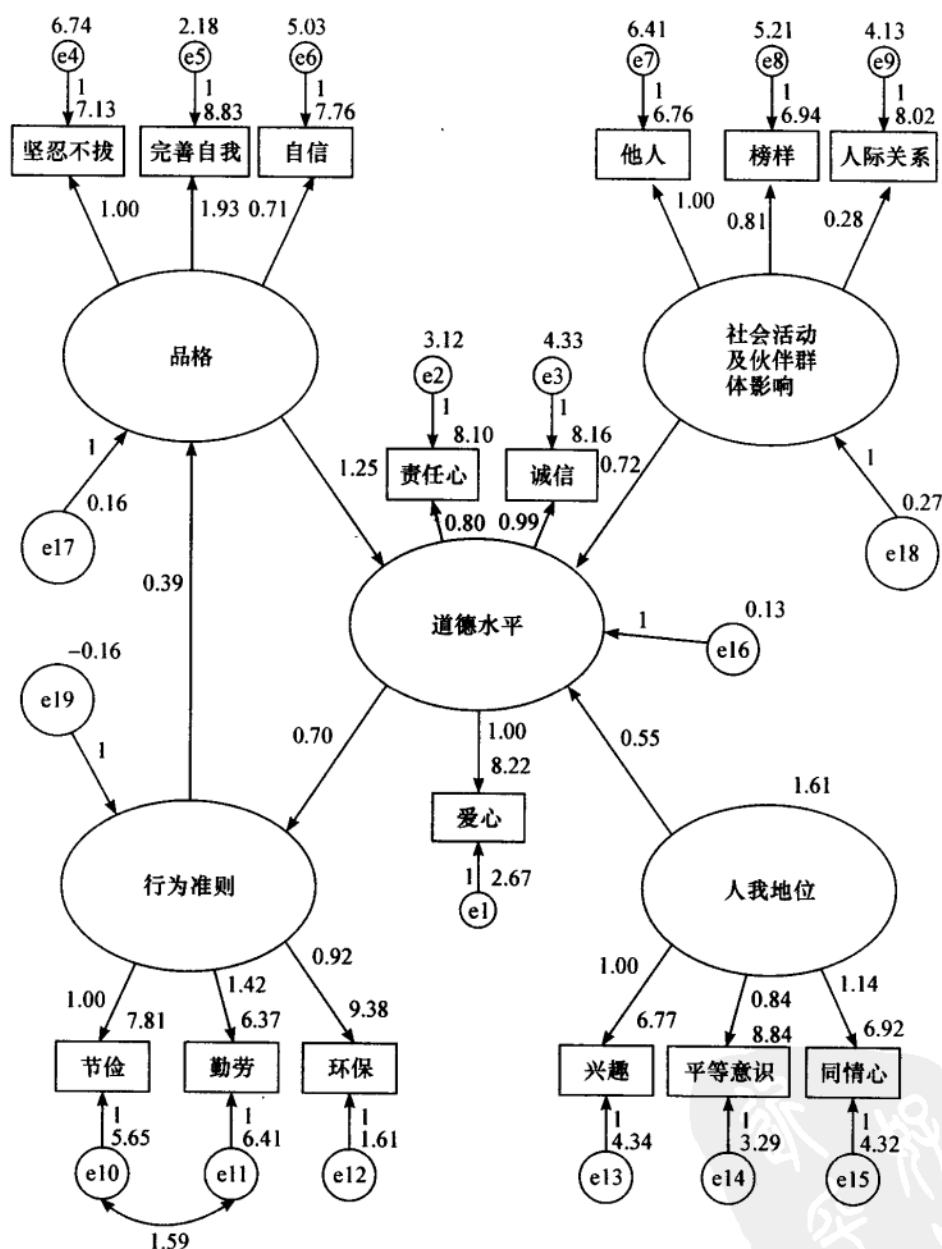


图 7—21 修正后模型的系数估计图



2. 虚假效应 (spurious effect)

指两个内生变量的相关系数中，由于共同的原因变量而产生的相关部分。它只在内生变量的相关系数的分解中出现。如果模型中不存在具有相同原因变量的相关的内生变量（如本章案例中就不存在），则不会存在虚假效应。

三、标准化系数

前面所分析的路径系数（或载荷系数）没有经过标准化，称作非标准化系数。非标准化系数中存在依赖于有关变量的测量单位，在比较路径系数（或载荷系数）时无法直接使用，采用标准化系数，可以直接比较不同系数作用的大小。在 Analysis Properties 中的 Output 页中选择 Standardized Estimates 项（见图 7—22），可输出标准化的路径系数（或载荷系数）如表 7—12。

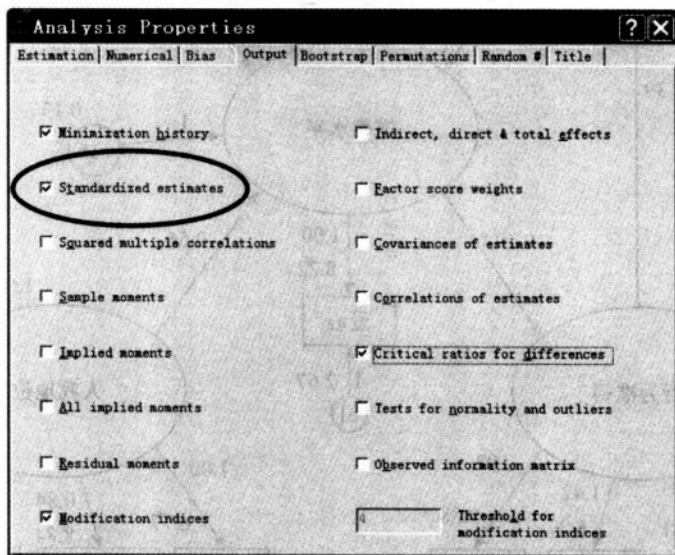


图 7—22 标准化系数计算

标准化系数是将各变量原始分数转换为 Z 分数^①后得到的估计结果，用以度量变量间的相对变化水平。因此不同变量间的标准化路径系数（或标准化载荷系数）可以直接比较。从表 7—14 中可以看出：受“道德水平”潜变量影响

① Z 分数转换公式为： $Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{s}$ 。



的是“行为准则”潜变量和“社会活动及伙伴群体影响”潜变量；标准化路径系数分别为 1.25 和 0.88，这说明“道德水平”潜变量对“行为准则”潜变量的影响程度大于其对“社会活动及伙伴群体影响”潜变量的影响程度。

表 7—14 模型修正后标准化系数

		Estimate
道德水平	←人我地位	.509
社会活动_及伙伴群_体影响	←道德水平	.883
q7 节俭	←行为准则	.307
q4 勤劳	←行为准则	.395
q11 环保	←行为准则	.485
q13 兴趣	←人我地位	.520
q14 平等意识	←人我地位	.507
q20 同情心	←人我地位	.571
q26 责任心	←道德水平	.527
q25 诚信	←道德水平	.548
q3 他人	←社会活动_及伙伴群_体影响	.403
q12 榜样	←社会活动_及伙伴群_体影响	.366
q1 人际关系	←社会活动_及伙伴群_体影响	.150
q22 坚忍不拔	←品格	.240
q21 完善自我	←品格	.643
q17 自信	←品格	.199
q28 爱心	←道德水平	.643
道德水平	←品格	.583
行为准则	←道德水平	1.251
品格	←行为准则	.462

附录一 Amos 简介

Amos 是由 Small Waters 公司开发的结构方程模型分析软件。SPSS 公司将 Amos 作为结构方程模型分析模块与 SPSS 软件捆绑，使研究者可以轻松同时使用 Amos 和 SPSS 进行分析。

Amos 分为 Amos Graphics 和 Amos Basic 两部分，其中 Amos Graphics 是通过点击菜单的方式完成模型设定，免去传统编程的烦恼，研究者只要利



用它所提供的绘图工具将待验证的模型结构在界面上绘制出来，软件会自动进行模型运算；而 Amos Basic 是通过书写类似 Visual Basic 的程序语言来设定模型，这样的方式比较灵活，可以对一系列模型进行批处理。在实际应用中根据不同的研究需要，这两个部分可以相互辅助，取长补短。

Amos 以上述两部分为基础，包含以下窗口：

- (1) Amos Basic：Amos 的程序设定窗口；
- (2) Amos Graphics：Amos 的路径图设定窗口；
- (3) Graphics Automation Demo：为一般的绘图工作提供宏程序；
- (4) View Data：指定数据文件路径，可以用来观察数据；
- (5) View Path Diagrams：显示一个目录下的模型结构图片的窗口；
- (6) View Table：数据结果表格化呈现窗口；
- (7) View Text：数据结果文本文件。





在模型分析方面，Amos 提供了诸如标准误和置信区间、样本平均数、方差、协方差和相关系数等基本统计结果，对于模型估计提供了以下几种估计方法：

- (1) 最大似然法；
- (2) 加权最小二乘法；
- (3) 广义最小二乘法；
- (4) 布朗渐近分布自由标准；
- (5) 自由量表最小二乘法。

附录二 Amos 工具栏功能表

Amos 工具栏功能见附表 1。

附表 1 Amos 工具栏功能表

图标	功 能	图标	功 能
	绘制可测变量		绘制潜变量
	为潜变量增添可测变量		绘制因果关系



续前表

图标	功 能	图标	功 能
	绘制相关关系		增加残差变量
	添加路径图标题		列出模型中的变量
	列出数据中的变量		选中单一对象
	选中所有对象		解除所有对象
	复制对象		移动对象
	删除对象		改变对象形状
	旋转潜变量指标		镜像转移潜变量指标
	移动参数值		重新定位路径图
	变量微调		选择数据文件
	设定分析属性		计算模型估计值
	将路径图复制到剪贴簿		显示文字报表
	保存当前路径图		对象属性设定
	对象属性的拖曳/复制		保持对称
	将选择区域放大		放大
	缩小		显示完整页面



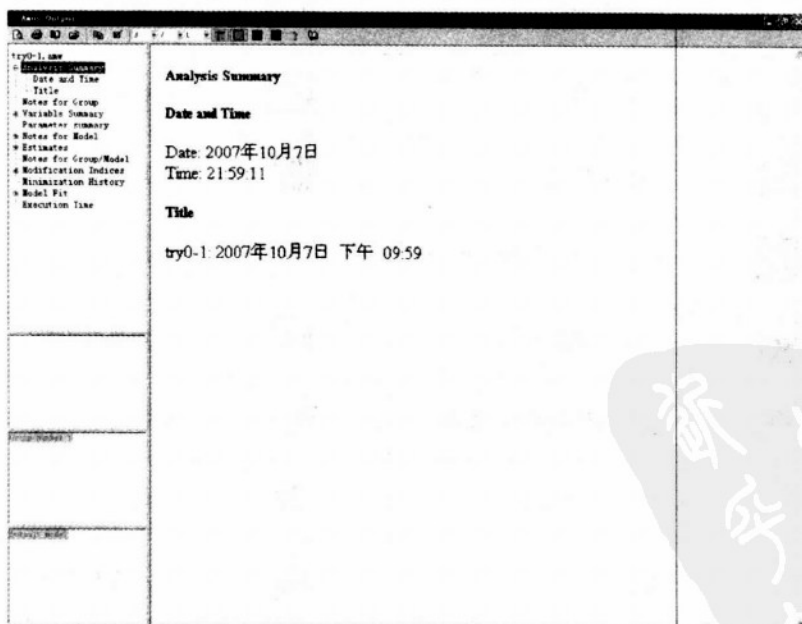
续前表

图标	功 能	图标	功 能
	调整适宜的路径图大小		放大镜
	Bayesian		多群组分析
	打印		还原
	取消还原		模型检索

附录三 案例输出结果

1. 分析基本情况 (Analysis Summary)

在分析基本情况中, Amos 自动记录了分析过程的日期和时间, 如附图 1 所示。



附图 1 基本信息

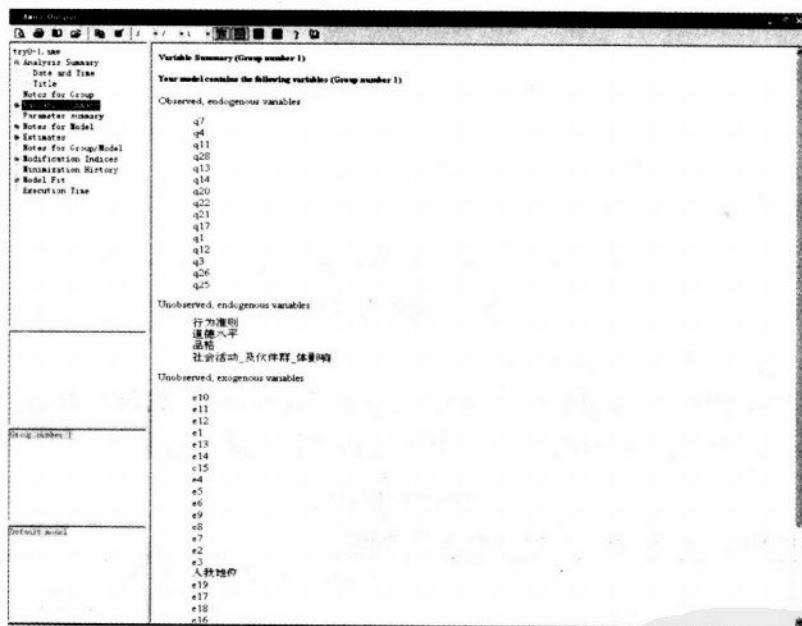


2. 变量基本情况 (Variable Summary)

在变量基本情况中, Amos 记录了变量列表 (见附图 2) 和不同类型变量的频数统计 (见附表 2)。

附表 2 频数统计表

Number of variables in your model;	39
Number of observed variables;	15
Number of unobserved variables;	24
Number of exogenous variables;	20
Number of endogenous variables;	19



附图 2 变量基本情况

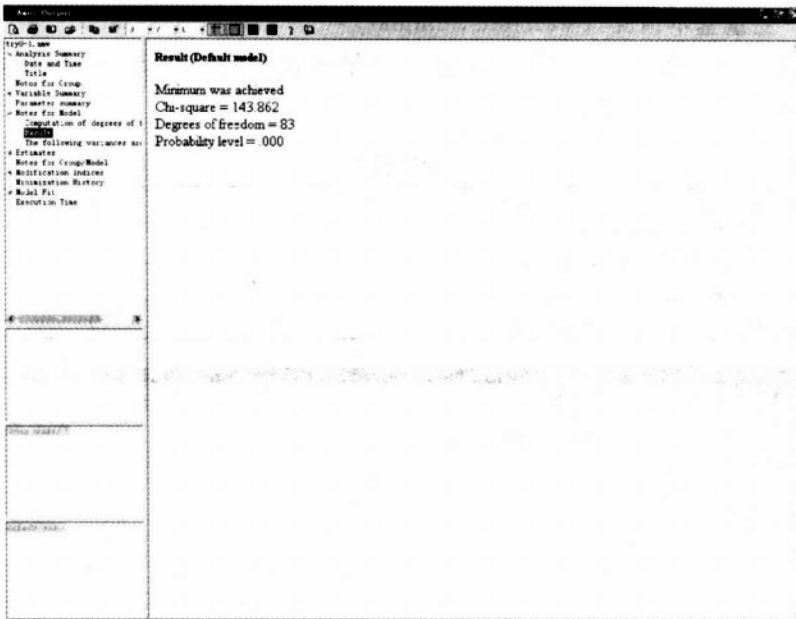
3. 模型信息 (Notes for Model)

在模型信息中, Amos 记录了模型的自由度信息 (见附表 3) 和模型的 χ^2 检验结果 (见附图 3)。

附表 3 自由度信息

Computation of degrees of freedom (Default model)

Number of distinct sample moments;	120
Number of distinct parameters to be estimated;	37
Degrees of freedom (120-37);	83



附图 3 χ^2 检验结果

4. 估计结果 (Estimates)

在估计结果中 (见附图 4), Amos 记录了路径系数/载荷系数的估计结果 (见附表 4), 以及对模型方差、协方差的估计结果 (见附表 5 和附表 6)。

附表 4 系数估计结果

Regression Weights: (Group number 1-Default model)

		Estimate	S. E.	C. R.	P	Label
道德水平	←人我地位	.473	.211	2.240	.025	
社会活动及伙伴群体影响	←人我地位	.373	.246	1.519	.129	
社会活动_及伙伴群体影响	←道德水平	.384	.210	1.828	.068	
q7	←行为准则	1.000				
q4	←行为准则	1.444	.314	4.601	***	
q11	←行为准则	.931	.218	4.269	***	
q13	←人我地位	1.000				



续前表

		Estimate	S. E.	C. R.	P	Label
q14	←人我地位	.803	.160	5.008	***	
q20	←人我地位	1.138	.209	5.439	***	
q26	←道德水平	.805	.118	6.807	***	
q25	←道德水平	.988	.142	6.940	***	
q3	←社会活动_及伙伴群体影响	1.000				
q12	←社会活动及伙伴群体影响	.932	.250	3.724	***	
q1	←社会活动_及伙伴群体影响	.275	.160	1.716	.086	
q22	←品格	1.000				
q21	←品格	1.940	.692	2.805	.005	
q17	←品格	.735	.371	1.980	.048	
q28	←道德水平	1.000				
道德水平	←品格	1.414	.797	1.774	.076	
行为准则	←道德水平	.704	.162	4.352	***	
品格	←行为准则	.408	.180	2.265	.024	

附表 5

方差估计结果

Variances: (Group number 1-Default model)

	Estimate	S. E.	C. R.	P	Label
人我地位	1.650	.466	3.542	***	
e19	-.169	.123	-1.375	.169	
e17	.126	.123	1.020	.308	
e16	.107	.235	.456	.648	
e18	.199	.393	.506	.613	
e10	5.688	.523	10.884	***	
e11	6.460	.626	10.325	***	
e12	1.636	.177	9.265	***	
e1	2.653	.300	8.838	***	
e13	4.299	.479	8.970	***	
e14	3.364	.359	9.370	***	
e15	4.265	.517	8.245	***	
e4	6.762	.626	10.795	***	
e5	2.251	.450	4.999	***	
e6	5.025	.461	10.891	***	
e9	4.146	.376	11.014	***	



续前表

	Estimate	S. E.	C. R.	P	Label
e8	5.069	.573	8.844	***	
e7	6.567	.714	9.198	***	
e2	3.081	.312	9.886	***	
e3	4.333	.442	9.796	***	

附表 6 协方差估计结果

Covariance: (Group number 1-Default model)

	Estimate	S. E.	C. R.	P	Label
e10 \longleftrightarrow e11	1.635	.431	3.798	***	

Amos Output					
try0-1.nw					
Analysis Summary					
Date and Time					
Title					
Notes for Group					
Variable Summary					
Parameter Summary					
Notes for Model					
Model Fit					
Execution Time					
Estimates (Group number 1 - Default model)					
Scalar Estimates (Group number 1 - Default model)					
Maximum Likelihood Estimates					
Regression Weights: (Group number 1 - Default model)					
	Estimate	S.E.	C.R.	P	Label
道德水平	473	211	2.240	.025	
社会活动及伙伴群体影响	373	246	1.519	.129	
社会活动及伙伴群体影响	384	210	1.828	.068	
q7	1000				
q4	1444	314	4.601	***	
q11	951	218	4.269	***	
q13	1000				
q14	803	160	5.068	***	
q20	1138	209	5.439	***	
q26	805	118	6.807	***	
q25	988	142	6.940	***	
q3	1000				
q12	932	250	3.724	***	
q1	275	160	1.716	.086	
q22	1000				
q21	1940	692	2.805	.005	
q17	735	371	1.980	.048	
q23	1000				
道德水平	1414	797	1.774	.076	
行为准则	704	162	4.352	***	
品格	408	180	2.265	.024	
Covariances: (Group number 1 - Default model)					
	Estimate	S.E.	C.R.	P	Label
e10 \longleftrightarrow e11	1.635	.431	3.798	***	
Variances: (Group number 1 - Default model)					
	Estimate	S.E.	C.R.	P	Label
人找地位	1.650	.466	3.542	***	
e19	-.169	.123	-1.375	.169	
e17	.126	.123	1.020	.308	
e16	.107	.235	.456	.648	
e18	.199	.393	.506	.613	
e10	5.688	.523	10.884	***	
e11	6.810	.676	10.225	***	

附图 4 参数估计结果

5. 修正指数 (Modification Indices)

在修正指数中, Amos 记录了模型的修正指数信息 (见附图 5)。

6. 模型拟合 (Model Fit)

在模型拟合中, Amos 记录了各种拟合指数结果 (见附图 6)。



1. Analysis Summary Date and Time Title Name for Group Variable Summary Parameter Summary Name for Model Estimator Name for Group/Model Modification Indices Regression History Model Fit Execution Time	
Modification Indices (Group number 1: Default model) Constraints (Group number 1: Default model) M1 Par Change e7 <-> e16 4.252 280 e7 <-> e19 4.340 231 e8 <-> e3 5.024 776 e5 <-> e9 4.242 454 e4 <-> e7 4.430 934 e4 <-> e6 7.113 1.004 e14 <-> e10 5.955 -545 e14 <-> e4 6.144 800 e13 <-> e8 7.113 870 e12 <-> e5 5.413 318 e12 <-> e14 4.173 319 e11 <-> e10 7.229 760 e11 <-> e7 6.251 1.022 e11 <-> e13 6.010 -942 e10 <-> e8 4.248 -698 e10 <-> e1 4.168 -526 Variables (Group number 1: Default model) M1 Par Change Regression Weights (Group number 1: Default model) M1 Par Change q24 <-> q12 4.501 -120 q3 <-> q22 4.632 135 q3 <-> q4 5.927 148 q12 <-> q25 4.554 -126 q12 <-> q13 5.534 142 q17 <-> q22 6.602 138 q21 <-> q1 4.047 105 q22 <-> q17 6.737 189 q14 <-> q22 5.035 111 q13 <-> q12 5.549 135 q13 <-> q4 4.288 -105 q4 <-> q3 5.342 130	

附图 5 MI 计算结果

Figure 1. Summary

- Analysis Summary
- Date and Time
- Title
- Name for Group
- Variable Summary
- Parameter Summary
- Name for Model
- Estimator
- Name for Group/Model
- Modification Indices
- Regression History
- Model Fit**
- Execution Time

Model Fit Summary

CMIN

Model	NPBAR	CMIN	DF	P	CMIN/DF
Default model	37	143.562	83	0.000	1.733
Saturated model	120	0.000	0		
Independence model	15	587.549	105	0.000	5.596

RMSEA GFI

Model	RMSEA	GFI	AGFI	PGFI
Default model	0.25	0.930	0.898	0.643
Saturated model	0.00	1.000		
Independence model	0.21	0.652	0.602	0.570

Baseline Comparisons

Model	NFI	RFI	IFI	TLI	CFI
Default model	0.755	0.690	0.879	0.840	0.874
Saturated model	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Independence model	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Parsimony Adjusted Measures

Model	FRATIO	PNFI	PCFI
Default model	0.790	0.597	0.691
Saturated model	1.000	1.000	1.000
Independence model	0.000	0.000	0.000

NCP

Model	NCP	LO 90	HI 90
Default model	60.862	31.448	98.140
Saturated model	0.000	0.000	0.000
Independence model	482.549	410.170	562.437

FMIN

Model	FMIN	F0	LO 90	HI 90
Default model	580	245	127	396
Saturated model	0.000	0.000	0.000	0.000
Independence model	2.369	1.946	1.654	2.268

RMSEA

附图 6 模型的拟合指数



附录四 拟合指数一览

一、绝对拟合指数

1. χ^2 : Chi-square

$$CHI = (N-1)FF$$

2. GFI: Unbiased Goodness of Fit Index

$$GFI = p / (2DK + p) = p / [2(CHI - df) / (N-1) + p]$$

3. RMR: Root mean square residual

$$RMR = \sqrt{2 \sum_i \sum_j (s_{ij} - e_{ij})^2 / [p(p+1)]}$$

其中 s_{ij} 和 e_{ij} 是样本协方差矩阵 S 和再生协方差矩阵 E 的元素。

4. SRMR: Standardized root mean square residual

$$SRMR = \sqrt{2 \sum_i \sum_j (s_{ij} - e_{ij})^2 / [p(p+1)]}, \text{ 其中 } s_{ij} \text{ 和 } e_{ij} \text{ 是样本相关}$$

矩阵 S 和再生相关矩阵 E 的元素。

5. RMSEA: Root mean square error of approximation

$$RMSEA = \sqrt{PDF/df} = \sqrt{\max[(CHI - df) / (N-1), 0] / df}$$

二、相对拟合指数

1. NFI: Normed fit index

$$NFI = 1 - FF_T / FF_N = (CHI_N - CHI_T) / CHI_N$$

2. TLI: Tucker-Lewis index

$$TLI = (CHI_N / df_N - CHI_T / df_T) / (CHI_N / df_N - 1)$$

3. CFI: Comparative fit index

$$\begin{aligned} CFI &= 1 - \max(CHI_T - df_T, 0) / \max(CHI_N - df_N, CHI_T - df_T, 0) \\ &= 1 - \max(NCP_T, 0) / \max(NCP_N, 0) \end{aligned}$$



三、信息指数

1. AIC: Akaike information criterion for model

$$AIC = CHI + 2k = CHI + p(p+1) - 2df$$

2. CAIC: Consistent Akaike information criterion for model

$$CAIC = CHI + (1 + \ln N)k = CHI + (1 + \ln N)[0.5p(p+1) - df]$$

资源
知识
PDG



参考文献

1. Kenneth A. Bollen: *Structural Equations with Latent Variables*, John Wiley & Sons, Inc. 1989
2. James L. Arbuckle, Werner Worthke: *Amos 4.0 User Guide* (SPSS 公司 1999 年)
3. Jan-Bernd Lohmoller: *Latent Variable Path Modeling with Partial Least Squares*. Physica-Verlag Heidelberg, 1989
4. Barbara M. Byrne: *Structural Equation Modeling with Amos-Basic Concepts, Applications, and Programming*, University of Ottawa
5. 易丹辉. 北京市居民医疗消费行为及意愿研究. 北京: 中国人民大学出版社, 2004
6. 侯杰泰, 温忠麟, 成子娟. 结构方程模式及其应用. 北京: 教育科学出版社, 2004
7. 黄芳铭. 结构方程模式理论与应用. 北京: 中国税务出版社, 2005
8. 李茂能. 结构方程模式软件 Amos 之简介及其在测验编制上之应用. 台北: 心理出版社, 2006
9. 王惠文, 吴载斌, 孟洁. 偏最小二乘回归的线性与非线性方法. 北京: 国防工业出版社, 2006
10. 李健宁. 结构方程模型导论. 合肥: 安徽大学出版社, 2004

[General Information]

书名=结构方程模型：方法与应用

作者=易丹辉编著

页数=208

出版社=中国人民大学出版社

出版日期=2008年04月第1版

SS号=11986520

DX号=000006542014

url=http://img.duxiu.com/n/jpgfs.shtml?kid=67676F6E6C6B68663536343639373736&pagetype=5&pagenum=1&template=jpgfs&uf=1&a=5266AD90B614C93474525975FC081283&t=5&url=http%3A%2F%2Fbook1.duxiu.com%2FbookDetail.jsp%3FdxNumber%3D000006542014%26d%3D8974F520BED46DDC2A96BC63916B92D2%26rtype%3D1

封面	
书名	
版权	
前言	
目录	
第一章	概述
	第一节 问题的提出
	第二节 路径分析
	第三节 模型的有关概念和记号
第二章	因果模型
	第一节 因果模型的类型
	第二节 因果模型的识别
	第三节 因果模型的建立
第三章	结构方程模型设定
	第一节 理论模型的设定
	第二节 模型的基本假定
	第三节 模型识别
第四章	模型参数估计
	第一节 参数估计的基本思路
	第二节 参数估计的常用方法
	第三节 信度与效度
	第四节 偏最小二乘法的应用
	附录 测量误差的影响
第五章	模型评价
	第一节 参数检验
	第二节 模型整体评价
	第三节 模型解释能力的评价
第六章	模型修正
	第一节 模型修正的基本问题
	第二节 模型修正的方法
	第三节 模型修正时应注意的几个问题
	附录 属性变量的处理
第七章	应用案例
	第一节 模型设定
	第二节 A m o s 实现
	第三节 模型拟合
	第四节 模型修正
	第五节 模型解释
	附录一 A m o s 简介
	附录二 A m o s 工具栏功能表
	附录三 案例输出结果
	附录四 拟合指数一览
参考文献	